Formelsammlung Analysis

1 Folgen und Reihen

1.1 Arithmetische und geometrische Folgen

Arithmetische Folge $a_{n+1} - a_n = d$ für alle n

$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Geometrische Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für alle $n, q \in \mathbb{R} \setminus 0$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

1.2 Grenzwerte: Definition (Folgen)

- Die Folge (a_n) heißt Nullfolge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, sodass für alle Folgeglieder mit höherer Nummer, also $n > n_0$ gilt:

  $$|a_n| < \epsilon$$

- Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert a, wenn die Folge $(a_n - a)$ den Grenzwert 0 hat.
- Folgen ohne Grenzwert heißen *divergent*.
- Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $K > 0$ gibt, sodass $|f_n| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1.3 Grenzwertsätze (Folgen)

Hat die Folge (a_n) den Grenzwert a, die Folge (b_n) den Grenzwert b, so gilt:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad b \neq 0$

2 Funktionen (formale Eigenschaften)

2.1 Grenzwerte von Funktionen

- [Definition, Eigenschaften, Grenzwertsätze analog]

2.1.1 Regel von l'Hospital

Sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Voraussetzungen:

- Es gibt eine Stelle a, sodass $u(a)$ und $v(a)$ entweder Null sind oder bestimmt divergieren
- u und v sind in einer Umgebung von a differenzierbar
- Der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.1.2 Einseitige Grenzwerte

Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat für $x \to p+$ den Limes L, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x -Werte aus dem Definitionsbereich X von f, die der Bedingung $0 < x - p < \delta$ genügen, auch $|f(x) - L| < \varepsilon$ gilt.

In diesem Falle nennt man den Grenzwert $\lim_{x\to p+} f(x) := L$ *konvergent*.

2.2 Stetigkeit

Eine Funktion f heißt an einer Stelle x_o *stetig*, wenn der Grenzwert von f für x gegen x_0 existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0-h) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

- *Epsilon-Delta-Kriterium*: $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist *stetig in* $x_0 \in D$, wenn
  zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- *Folgenkriterium*: $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist *stetig in* $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Elementen $x_k \in D$, die gegen x_0 konvergiert, auch $f(x_k)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

2.3 Grundlegendes

Zwischenwertsatz Eine im Intervall $[a,b]$ ($a<b$) stetige Funktion f nimmt jeden Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Spezialfall: **Nullstellensatz**

Eine in I stetige Funktion, bei der $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, hat dort mindestens eine Nullstelle.

Extremwertsatz Eine in einem Intervall stetige Funktion hat dort stets einen größten und einen kleinsten Funktionswert.

Mittelwertsatz Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ($a<b$) stetig und differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a,b)$, so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

gilt.

3 Differentialrechnung

3.1 Differenzierbarkeit: Definitionen

Eine Funktion f ist genau dann *differenzierbar* an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als die Ableitung von f an der Stelle x_0 .

3.2 Geometrisches: Tangenten

Tangentengleichung zu f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Normale (Senkrechte) $y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

3.3 Ableitungsregeln

Konstante Funktion $(a)' = 0$

Faktorregel $(a \cdot f)' = a \cdot f'$

Summenregel $(g \pm h)' = g' \pm h'$

Produktregel $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$

Quotientenregel $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$

Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$

Kettenregel $(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = g(x)^{h(x)}$ $f'(x) = \left(h'(x) \ln(g(x)) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right) g(x)^{h(x)}$.

Leibnizsche Regel Die Ableitung n -ter Ordnung für ein Produkt aus zwei n -fach differenzierbaren Funktionen f und g ergibt sich aus

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Die hier auftretenden Ausdrücke der Form $\binom{n}{k}$ sind Binomialkoeffizienten.

Formel von Faà di Bruno Diese Formel ermöglicht die geschlossene Darstellung der n -ten Ableitung der Komposition zweier n -fach differenzierbarer Funktionen. Sie verallgemeinert die Kettenregel auf höhere Ableitungen.

3.4 Ableitungen wichtiger Funktionen

siehe **Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen**

3.5 Geometrische Anwendungen: Eigenschaften von Kurven (Kurvendiskussion)

Betrachtet wird $f : x \mapsto f(x)$

3.5.1 Gebrochenrationale Funktionen

Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{a_z x^z + a_{z-1}x^{z-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P_z(x)}{Q_n(x)}$$

- **Einteilung**
  - Ist das Nennerpolynom Q_n vom Grad 0 (also $n = 0$ und $b_0 \neq 0$) und ist P_z nicht das Nullpolynom, so spricht man von einer *ganzrationalen oder einer Polynomfunktion*.
  - Ist $n > 0$, so handelt es sich um eine *gebrochenrationale Funktion*.
  - Ist $n > 0$ und $z < n$, so handelt es sich um eine *echt gebrochenrationale Funktion*.
  - Ist $n > 0$ und $z \geq n$, so handelt es sich um eine *unecht gebrochenrationale Funktion*. Sie kann mittels Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion und eine echt gebrochenrationale Funktion aufgeteilt werden.

- **Definitionsbereich**
  - $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0 \mid Q_n(x_0) = 0\}$
- **Asymptotisches Verhalten:** Für $x \to \infty$ strebt $f(x)$
  - [falls $z > n$] gegen $\operatorname{sgn}(a_z) \cdot \operatorname{sgn}(b_n) \cdot \infty$, wobei *sgn* die Vorzeichenfunktion bezeichnet.
  - [falls $z = n$] gegen $\frac{a_z}{b_n}$
  - [falls $z < n$] gegen 0 (die x-Achse)
- **Symmetrie**
  - Sind P_z und Q_n beide gerade oder beide ungerade, so ist f gerade (symmetrisch zur y-Achse).
  - Ist P_z gerade und Q_n ungerade, so ist f ungerade (punktsymmetrisch zum Ursprung); Gleiches gilt, wenn P_z ungerade und Q_n gerade ist.
- **Polstellen:** x_p heißt Polstelle von f , wenn
  - $Q_n(x_p) = 0 \quad$ und $\quad P_z(x_p) \neq 0$.
- **Asymptoten:** Mittels Polynomdivision von p durch q erhält man $p = g \cdot q + r$ mit Polynomen g und r , wobei der Grad von r kleiner als der von q ist. Das asymptotische Verhalten von $f = \frac{p}{q} = g + \frac{r}{q}$ ist damit durch die ganzrationale Funktion g bestimmt:
  - $[z < n]$ x-Achse ist Asymptote: $g(x) = 0$
  - $[z = n]$ waagerechte Asymptote: $g(x) = \frac{a_z}{b_n}$
  - $[z = n+1]$ schräge Asymptote: $g(x) = mx + c\,; m \neq 0$
  - $[z > n+1]$ ganzrationale Näherungsfunktion

4 Integralrechnung

4.1 Flächenberechnung

Der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion *f(x)* im Intervall von *a* bis *b* ist

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{falls} f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$
- $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{falls} f(x) \leq 0 \forall x \in [a,b]$
- Andernfalls ist das Intervall durch Bestimmung der Nullstellen in solche Teilintervalle zu zerlegen.

4.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x, \qquad a < b < c$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4.3 Integralfunktion und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Integralfunktion $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung $F_a(x)' = f(x)$

Stammfunktion Jede Funktion F heißt *Stammfunktion* von f , wenn für alle *x* des Definitionsbereichs gilt

$$F'(x) = f(x)$$

Dies bezeichnet der Ausdruck $\int f(x)\mathrm{d}x$

Integration Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

4.4 Spezielle Stammfunktionen

Die Stammfunktionen von $f(x) = x^n$ sind

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

Alles weitere siehe **Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen**

4.5 Integrationsmethoden

Produkt-, Teil- oder partielle Integration

- unbestimmt

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\mathrm{d}x$$

- bestimmt

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$$

Integration durch Substitution

- unbestimmt

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

- bestimmt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

- Spezialfall: *lineare Substitution*

$$\int f(mx+n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}F(mx+n)+C, \qquad m\neq 0$$

$$\int_a^b f(mx+n)\mathrm{d}x = \frac{1}{m}[F(mx+n)]_a^b, \qquad m\neq 0$$

- Spezialfall: *logarithmische Integration*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C, \qquad f(x)\neq 0$$

4.6 Angewandtes

4.6.1 Volumenbestimmung

- Volumen des Körpers bei Rotation der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a,b]

$$\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

- Volumen des Körpers bei Rotation der Fläche zwischen dem Graphen der umkehrbaren Funktion f und der y-Achse im Intervall [a,b]

$$\pi\cdot\int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2\mathrm{d}y$$

- Volumen des Körpers, der bei y-Rotation der Fläche, welche durch den Graphen der Funktion f im Intervall [a,b], der x-Achse und den beiden Geraden $x=a$ und $x=b$ begrenzt wird, entsteht

$$2\pi\cdot\int_a^b (x\cdot f(x))\mathrm{d}x$$

Guldinsche Regeln

M Oberflächeninhalt

V Volumen

L Länge der erzeugenden Linie (Profillinie)

A Flächeninhalt der erzeugenden Fläche

R Radius des Schwerpunktkreises

Erste Regel $M = L\cdot 2\pi R$

Ausgedrückt in Abhängigkeit von der Funktion f(x) der erzeugenden Linie ergibt sich dies als:

- bei Rotation um die x-Achse

$$M = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

- bei Rotation um die y-Achse

$$M = 2\pi\int_{\min(f(a),f(b))}^{\max(f(a),f(b))} f^{-1}(y)\sqrt{1+\left[(f^{-1}(y))'\right]^2}\mathrm{d}y.$$

Zweite Regel

$$V = A\cdot 2\pi R.$$

Im Fall der Rotation um die x-Achse einer Fläche zwischen f(x), der x-Achse und den Grenzen x=a und x=b ergibt sich das Volumen ausgedrückt durch f(x) mit R als Flächenschwerpunkt zu

$$V = A\cdot 2\pi\frac{1}{A}\int_A y\mathrm{d}A = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

mit $y=\frac{f(x)}{2}$ und $\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$.

4.6.2 Weiteres

- Ist f auf [a,b] stetig, so heißt $\bar{m}$ der Mittelwert der Funktionswerte von f auf [a,b]

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- **Länge des Bogens** der differenzierbaren Funktion f im Intervall [a,b]:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

4.7 Näherungsweises Berechnen von Integralen: Numerische Integration

- Zerlegungssummen

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx hf(x_1)+hf(x_2)+\cdots+hf(x_n) \qquad \text{mit} h = \frac{b-a}{n}$$

- Keplersche Fassregel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\cdot\left(f(a)+4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

- Trapezregel
  - Sehnentrapez

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{f(b)+f(a)}{2}\cdot(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1}+f(x_n)\right)$$

  - Tangententrapez

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2}$$

- Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\cdot(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots f(x_n))$$

5 Quellen

- Konrad Königsberger: *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin u. a., 2004, ISBN 3-540-41282-4.

6 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

6.1 Text

- **Formelsammlung Analysis** *Quelle:* https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Analysis?oldid=143547716 *Autoren:* Aka, Wiegels, Boehm, MFM, P. Birken, Cepheiden, Saehrimnir, Digamma, Steef389, Christian1985, Kein Einstein, FranzR, Xqbot, Galaktos, Quartl, NikelsenH und Anonyme: 13

6.2 Bilder

6.3 Inhaltslizenz