Vektoranalysis: Druckversion

1 Grundbegriffe

Die Vektoranalysis wendet die Methoden der Analysis (Differential- und Integralrechnung) auf mathematische Funktionen an, in denen Vektoren auftreten, die sich in Abhängigkeit von Ort und Zeit verändern können. Die wichtigsten Anwendungsgebiete der Vektoranalysis sind physikalische Felder, insbesondere elektromagnetische Felder.

1.1 Physikalische Felder

sind Teilgebiete des Raumes R^3, in denen jedem Punkt eindeutig ein Skalar oder ein Vektor (auch ein Tensor oder Spinor) zugeordnet ist. Je nach Art der »Feldgröße« spricht man von einem Skalarfeld oder einem Vektorfeld.

Skalare Feldgrößen sind z. B. Druck, Temperatur, Beleuchtungsstärke, Potential.

Vektorielle Feldgrößen sind z. B. elektrische und magnetische Feldstärke, magnetische Induktion, Strömungsgeschwindigkeit.

Kraftfelder sind Felder, in denen z. B. eine elektrische Ladung oder eine Masse eine Kraft erfährt.

Elektrodynamische Felder sind zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder, in denen Induktionsvorgänge stattfinden.

Feldlinien sind (gedachte) Linien dergestalt, dass die Vektoren der Feldgröße ihre Tangenten sind. Bekannte Beispiele sind: Stromlinien, elektrische und magnetische Feldlinien.

2 Vektorfunktionen

Zur Schreibweise: Im Text werden - der deutschen Norm folgend - die Zeichen für Vektoren (***V***) kursiv und fett geschrieben. In den mit TeX gesetzten Formeln sind die Zeichen mit einem Pfeil versehen.

Für die Beschreibung eines Vektors durch seine kartesischen Komponenten sind drei Schreibweisen üblich: Mittels der Einheitsvektoren ***i, j, k*** auf der X-, Y- und Z-Achse, als einzeilige Matrix und als einspaltige Matrix.

$$\overrightarrow{V} = V_x \overrightarrow{i} + V_y \overrightarrow{j} + V_z \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

Ich werde diese Schreibweisen je nach Zweckmäßigkeit abwechselnd verwenden.

Eine Funktion, bei der die abhängige Variable ein Vektor ist, heißt Vektorfunktion. Im einfachsten Fall sind die (skalaren) kartesischen Komponenten *Vx*, *Vy*, *Vz* des Vektors Funktionen einer einzigen Variablen *u* (einparametrige Vektorfunktion).

$$\overrightarrow{V}(u) = \begin{pmatrix} V_x(u) & V_y(u) & V_z(u) \end{pmatrix}.$$

2.1 Ableitung einer Vektorfunktion

Analog zur Definition der Ableitung einer skalaren Funktion ist die Ableitung einer Vektorfunktion ***V***(u) definiert:

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}\,u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{V}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{V}(u+\Delta u) - \overrightarrow{V}(u)}{\Delta u}.$$

Durch Zerlegung des Vektors ***V*** in seine kartesischen Komponenten folgt daraus:

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}\,u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta V_x \overrightarrow{i} + \Delta V_y \overrightarrow{j} + \Delta V_z \overrightarrow{k}}{\Delta u} \right)$$

mit

$$\Delta V_x = V_x(u+\Delta u) - V_x(u) \quad \text{usw.}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}\,u} = \frac{\mathrm{d}\,V_x}{\mathrm{d}\,u}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}\,V_y}{\mathrm{d}\,u}\overrightarrow{j} + \frac{\mathrm{d}\,V_z}{\mathrm{d}\,u}\overrightarrow{k}.$$

Die Ableitung des Vektors ***V***(*u*) nach *u* ist als Summe dreier Vektoren wieder ein Vektor.

Ist insbesondere der Vektor ***V*** der vom Ursprung *O* des Koordinatensystems ausgehende »Ortsvektor« $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$ eines Punktes P(*x, y, z*), so gilt

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Bewegt sich der Punkt *P* irgendwie im Raum und sind seine Koordinaten differenzierbare Funktionen der Zeit *t*, so ist

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\vec{i} + y\,(t)\,\vec{j} + z\,(t)\,\vec{k}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\vec{k}\,.$$

Nun sind aber dx/dt, dy/dt und dz/dt die Geschwindigkeiten der Projektionen des Punktes P auf die Achsen:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = v_x, \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = v_y, \quad \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = v_z,$$

und daher

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}\,.$$

Dieser Vektor aber ist nichts anderes als der Geschwindigkeitsvektor von P, also ist

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{v}_P.$$

Analog ergibt sich der Vektor ***a*** der Beschleunigung des Punktes P:

$$\vec{a}_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2}.$$

2.2 Differentiationsregeln

Analog beweist man folgende Regeln:

1. Die Ableitung des Produkts einer skalaren Funktion $f(u)$ und eines konstanten Vektors ***V***

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left[f\,(u)\,\vec{V}\right] = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,u}\vec{V}\,.$$

2. Die Ableitung eines konstanten Vektors ist null.

3. Die Ableitung der Summe und Differenz zweier Vektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left[\vec{V}(u) \pm \vec{W}(u)\right] = \frac{\mathrm{d}\,\vec{V}}{\mathrm{d}\,u} \pm \frac{\mathrm{d}\,\vec{W}}{\mathrm{d}\,u}.$$

4. Weitere Differentiationsregeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left[f(u)\,\vec{V}(u)\right] = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\,u}\vec{V} + f\frac{d\vec{V}}{\mathrm{d}\,u} \qquad f(u)\text{: skalare Funktion,}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\vec{V}\,\vec{W}\right) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{V}}{\mathrm{d}\,u}\,\vec{W} + \vec{V}\,\frac{\mathrm{d}\,\vec{W}}{\mathrm{d}\,u},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{V}}{\mathrm{d}\,u} \times \vec{W} + \vec{V} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{W}}{\mathrm{d}\,u},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\vec{V}\,[f\,(u)] = \frac{\mathrm{d}\,\vec{V}}{\mathrm{d}\,f}\,\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,u}.$$

2.3 Beispiel

Der Ortsvektor ***r*** eines Punktes P sei

$$\vec{r}\,(\varphi) = (a\cos\varphi)\,\vec{i} + (a\sin\varphi)\,\vec{j} + \frac{h}{2\pi}\varphi\,\vec{k}\,.$$

Wenn φ alle reellen Zahlenwerte annimmt, durchläuft der Punkt P eine Schraubenlinie mit dem Radius a und der Ganghöhe h. Die Ableitung dieser Vektorfunktion ist der Vektor

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,\varphi} = -\,(a\sin\varphi)\,\vec{i} + (a\cos\varphi)\,\vec{j} + \frac{h}{2\pi}\vec{k}.$$

Setzen wir

$$\varphi = \omega\,t \qquad \omega = \text{konst.}$$

wobei t die Zeit sein soll, so hat P die konstante Winkelgeschwindigkeit ω und den Geschwindigkeitsvektor

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,\varphi}\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,\varphi}\omega = (-a\omega\sin\omega t)\,\vec{i} + (a\omega\cos\omega t)\,\vec{j} + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{k}.$$

3 Anwendungen auf die Differentialgeometrie der Raumkurven

3.1 Tangente, Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor einer Raumkurve

Analog zu den ebenen Kurven wird definiert:

Die Tangente an eine Raumkurve mit dem Ortsvektor ***r***(u) in einem ihrer Punkte P ist die Gerade durch P mit derselben Richtung wie der Vektor (d***r***/du)P (das bedeutet: die Vektorfunktion d***r***/du gebildet an der Stelle P).

Dabei ist u irgendeine Variable, durch die ***r*** beschrieben wird.

Diese Definition wird sofort plausibel, wenn wir die Variable u durch die Zeit t ersetzen. Dann ist (siehe oben):

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,u} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{v}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ gibt aber die momentane Bewegungsrichtung des Punktes P an, und das ist die Richtung der Kurventangente.

Führen wir nun wieder die beliebige Variable u ein, dann wird

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,u}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}=\vec{v}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}$$

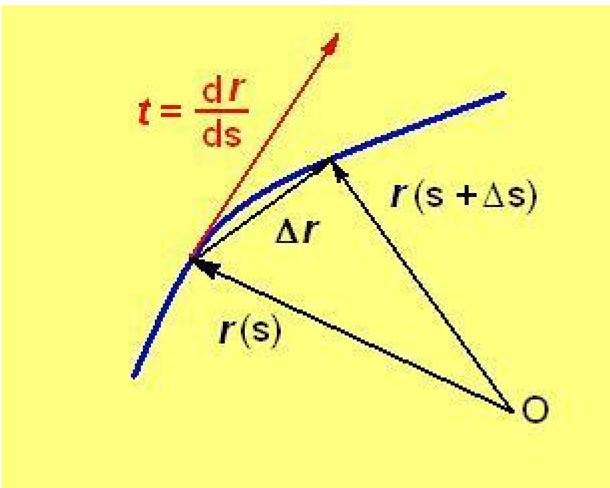
wobei $\mathrm{d}t/\mathrm{d}u$ lediglich ein skalarer Faktor ist, der an der Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$ nichts ändert. Also hat auch der Vektor $\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,u}$ die Richtung von $\boldsymbol{v}$ und damit die Richtung der Tangente.

Für das Folgende brauchen wir den auf der Kurventangente gelegenen Einheitsvektor. Er wird mit $\boldsymbol{t}$ bezeichnet. Man findet ihn, indem man den Geschwindigkeitsvektor durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{t}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\right|}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}}{v},$$

wobei v die Bahngeschwindigkeit des Punktes P ist. Ist $\boldsymbol{r}$ als Funktion der Bogenlänge s der Kurve gegeben, wobei s von einem beliebigen Punkt der Kurve aus gemessen wird, dann kann man v durch $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ersetzen:

$$\vec{t}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}}{\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,s}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,s}.$$



3.2 Schmiegungsebene und Krümmung einer Raumkurve

Es ist nützlich, sich zunächst die analogen Überlegungen und Begriffe bei einer ebenen Kurve zu vergegenwärtigen. Dort liegen selbstverständlich auch alle Kurventangenten in derselben Ebene, der Ebene der Kurve. Ändert sich die Richtung der Tangente (ihr Winkel) auf der Weglänge (Bogenlänge) Δs um den Wert $\Delta\ \tau$ so ist die »mittlere Krümmung« k_{m} auf der Strecke Δs

$$k_m=\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

und die Krümmung der Kurve im betrachteten Punkt P

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Unter dem Krümmungskreis der Kurve im Punkt P versteht man den Kreis durch P, der dieselbe Steigung und dieselbe Krümmung wie die Kurve in P hat. Der Radius ϱ dieses Kreises heißt Krümmungsradius der Kurve in P. Es gilt

$$\rho=\frac{1}{k}.$$

Die Tangenten einer Raumkurve liegen nicht in derselben Ebene und es gibt – im Gegensatz zu Flächen – im Punkt P auch nicht nur eine Tangentialebene, sondern unendlich viele. Unter ihnen greifen wir die Ebene heraus,in der der Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ und der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$ liegen. Der letztgenannte Vektor gibt nämlich die Richtung an, in welcher sich der Vektor $\boldsymbol{t}$ in P dreht. Diese Ebene heißt die Schmiegungsebene der Kurve in P.

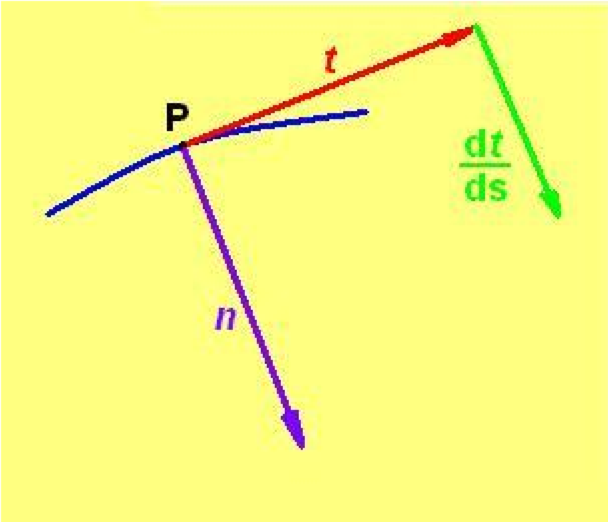
Der in der Schmiegungsebene liegende Einheitsvektor, der auf $\boldsymbol{t}$ senkrecht steht und dieselbe Richtung wie der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$ hat, heißt Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ der Kurve in P.

Hat ein Vektor $\boldsymbol{v}(u)$ eine konstante Länge v, so ist wegen $v^2 = \boldsymbol{v}^2$ auch $\boldsymbol{v}^2$ = konst. Differenziert man die letzte Gleichung nach u und benutzt dabei die Regel für die Differentiation eines Skalarprodukts $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$, so findet man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\vec{v}\right)^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=2\,\vec{v}\,\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,u}=0.$$

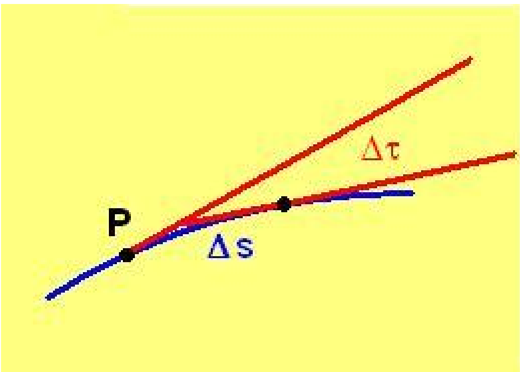
Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}u$ null ist und keiner der beiden Vektoren selbst null ist (Nullvektor bzw. konstanter Vektor), dann müssen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Dies leuchtet auch unmittelbar ein: Wenn der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}u$ eine Komponente in Richtung $\boldsymbol{v}$ hätte, dann würde sich die Länge von $\boldsymbol{v}$ zugleich mit u verändern.

Dieses Ergebnis wenden wir auf den Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ einer Raumkurve an. Da die Länge von $\boldsymbol{t}$ konstant ist, muss seine Ableitung $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$ auf $\boldsymbol{t}$ senkrecht stehen.



In der Abbildung liegen der Tangenten- und der Normalenvektor in der Zeichenebene, die folglich mit der Schmiegungsebene zusammenfällt. Die Kurve selbst dagegen verläuft im Allgemeinen links und rechts von *P* außerhalb dieser Ebene.

Unter der mittleren Krümmung einer Kurve im Bereich Δs versteht man den auf Δs bezogenen Drehwinkel $\Delta\tau$ der Tangente. Ihr Grenzwert für Δs gegen 0 heißt Krümmung k der Kurve im Punkt *P*.



$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s}$$

Ein in der Schmiegungsebene gelegener Kreis durch *P* mit derselben Steigung und derselben Krümmung wie die Raumkurve, heißt Krümmungskreis der Kurve. Sein Radius heißt Krümmungsradius ϱ der Kurve in *P*. Da für den Kreisbogen Δs (unabhängig von seiner Größe) stets gilt

$$\Delta s = \varrho\ \Delta\ \tau,$$

gilt für seine Krümmung

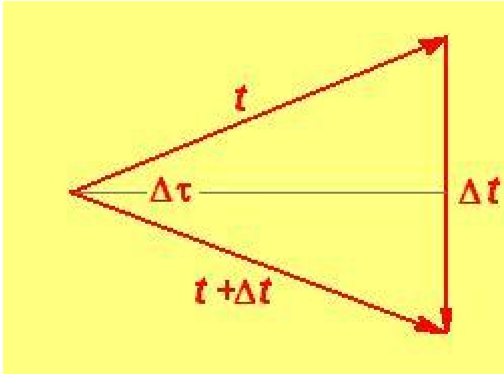
$$k = \Delta\tau/\Delta s = 1/\varrho$$

Zur Berechnung der Krümmung einer Kurve aus ihrem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(s)$ gehen wir wie folgt vor:

1. Berechnung von $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,\tau}\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,\tau}\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,\tau}k$$

2. Berechnung von $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$:



Es ist:

$$\frac{\Delta t}{2} \approx \sin\frac{\Delta\tau}{2} = \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^3 + - \cdots$$

und

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \approx \frac{2}{\Delta\tau}\sin\frac{\Delta\tau}{2} = 1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2 + - \cdots \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} =$$

3. Damit ergibt sich:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,s}\right| = k = \frac{1}{\rho}.$$

Da der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$ die Richtung des Normaleneinheitsvektors $\boldsymbol{n}$ hat, ist

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,s^2} = k\,\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$$

Hieraus folgt durch Quadrieren und Wurzelziehen:

$$k = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,s^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2\,z}{\mathrm{d}\,s^2}\right)^2}.$$

4 Integralrechnung mit Vektoren

In Integralen können Vektoren sowohl als Integrand (= die zu integrierende Funktion) als auch als Differential bei dem Integranden auftreten.

1. Typ: Nur der Integrand ist ein Vektor

Ein typisches Beispiel ist das Zeitintegral der Kraft, das in der Dynamik auftritt. (Dort ist es ein bestimmtes Integral; es genügt hier jedoch, nur unbestimmte Integrale zu untersuchen.)

$\int \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t = \int \left(F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}\right) \mathrm{d}\,t = \overrightarrow{i} \int F_x \,\mathrm{d}\,t + \overrightarrow{j} \int F_y \,\mathrm{d}\,t + \overrightarrow{k} \int F_z \,\mathrm{d}\,t;$

$\int \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t = \left(\int F_x \,\mathrm{d}\,t \quad \int F_y \,\mathrm{d}\,t \quad \int F_z \,\mathrm{d}\,t\right).$

Das Ergebnis ist also, wie zu erwarten war, ein Vektor.

Anmerkung: Dass oben die Einheitsvektoren ***i, j, k*** wie konstante Faktoren vor die Integrale gezogen werden dürfen, lässt sich wie folgt beweisen: Das Integralzeichen ist das Symbol für den Grenzwert einer Summe. Konstante Faktoren bei den Summanden können ausgeklammert werden, auch wenn sie (konstante) Vektoren sind.

2. Typ: Integrand und Differential sind Vektoren

Ein Beispiel dafür ist das Wegintegral der Kraft, mit dem die Arbeit berechnet wird.

$\int \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\,\overrightarrow{r} = \int \left(F_x \quad F_y \quad F_z\right) \cdot \left(\mathrm{d}\,x \quad \mathrm{d}\,y \quad \mathrm{d}\,z\right) = \int F_x \,\mathrm{d}\,x + \int F_y \,\mathrm{d}\,y + \int F_z \,\mathrm{d}\,z$

Da $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ein Skalarprodukt ist, ergibt sich für das Ergebnis des Integrals erwartungsgemäß auch ein Skalar.

Ein spezielles wichtiges Beispiel hierfür ist:

$\int \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\,\overrightarrow{v} = \int v_x \,\mathrm{d}\,v_x + \int v_y \,\mathrm{d}\,v_y + \int v_z \,\mathrm{d}\,v_z = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \mathrm{C}$

Die Integration folgt hier formal derselben Regel wie bei $\int x \,\mathrm{d}\,x$.

Ein anderes interessantes Beispiel (unter Verwendung des erst später erklärten Operators grad, dessen Bedeutung hier erkennbar ist):

$\int \mathrm{grad}\; U \;\mathrm{d}\,\overrightarrow{r} = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathrm{d}\,x \quad \mathrm{d}\,y \quad \mathrm{d}\,z\right)$

$\int \mathrm{grad}\; U \;\mathrm{d}\,\overrightarrow{r} = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathrm{d}\,x \quad \mathrm{d}\,y \quad \mathrm{d}\,z\right) =$

$$= \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}\,y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}\,z\right) = \int \mathrm{d}\,U = U + \mathrm{C}.$$

Erläuterung: Der Integrand im vorletzten Integral ist das vollständige Differential dU der Funktion $U = U(x, y, z)$.

3. Typ: Nur das Differential ist ein Vektor

$\int U \;\mathrm{d}\,\overrightarrow{v} = \int U\left(\mathrm{d}\,v_x \quad \mathrm{d}\,v_y \quad \mathrm{d}\,v_z\right) = \mathbf{i}\int U \;\mathrm{d}\,v_x + \mathbf{j}\int U \;\mathrm{d}\,v_y + \mathbf{k}\int U \;\mathrm{d}\,v_z.$

Das Ergebnis ist ein Vektor.

Hier gibt es eine PDF-Version.

5 Skalare und vektorielle Felder und Feldgrößen

Ein physikalisches Feld ist – wie eingangs schon erklärt – ein Teilgebiet des Raumes, in welchem in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte skalare oder vektorielle physikalische Größe (»Feldgröße« genannt) anzutreffen ist.

Bei **Skalarfeldern** ist die (skalare) Feldgröße U eine skalare Funktion des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ des betrachteten Punktes P:

$$U = U(\boldsymbol{r}) = U(x, y, z).$$

Beispiele für skalare Feldgrößen sind Druck und Temperatur in der Atmosphäre, das Gravitationspotential in der Umgebung einer Masse (z. B. der Erde), das Potential in der Umgebung eines elektrisch geladenen Körpers, die Lautstärke in einem Schallfeld.

Bei **Vektorfeldern** ist die (vektorielle) Feldgröße $\boldsymbol{V}$ eine Vektorfunktion von $\boldsymbol{r}$:

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(x, y, z).$

Beispiele für vektorielle Feldgrößen sind die elektrische und die magnetische Feldstärke, die Gravitationsfeldstärke, die Geschwindigkeit von Gasen und Flüssigkeiten in Strömungsfeldern.

5.1 Ein wichtiges Beispiel für ein Vektorfeld und ein Skalarfeld

Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im Feld einer punktförmigen elektrischen Ladung vom Betrag Q, die sich in O befindet, ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r}.$$

Das Potential φ eines Punktes P in einem beliebigen elektrischen Feld ist definiert als die »ladungsbezogene Arbeit« W/q, die aufzuwenden ist, um die Ladung q aus unendlicher Entfernung zu dem Punkt P zu bringen. (Ein Punkt eines Feldes besitzt nur dann ein definiertes Potential, wenn diese Arbeit vom Weg unabhängig ist, auf dem die Ladung nach P gebracht wird. – Dieses Problem wird später noch genauer untersucht.) Also:

Potential $\varphi = \dfrac{W}{q}.$

Diese Definition gilt analog auch für das Potential eines Gravitationsfeldes, wobei lediglich q durch die Masse m des bewegten Körpers zu ersetzen ist.

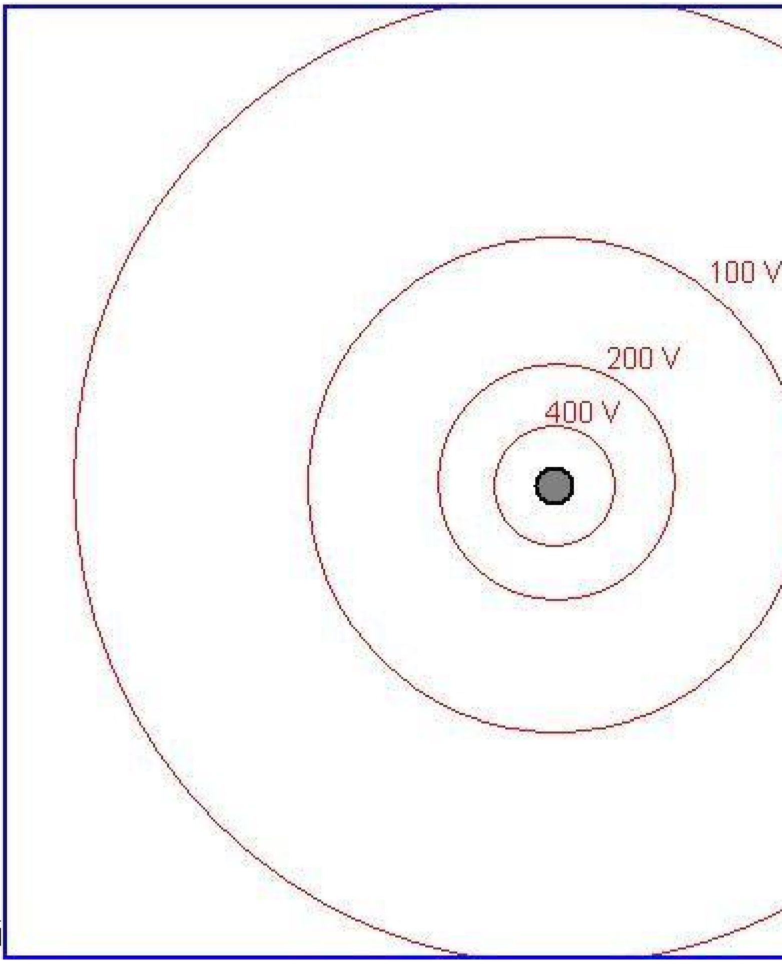
Für das oben beschriebene zentralsymmetrische elektrische Feld, in dem – wie später gezeigt wird – jedem Punkt ein Potential zugeordnet werden kann, errechnet man die Arbeit durch eine Integration:

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F}\,\mathrm{d}\,\vec{s}.$$

Da in diesem Feld die Arbeit vom gewählten Weg unabhängig ist, denken wir uns die Ladung q einfach radial nach innen bewegt, wobei dann Kraft- und Wegvektor gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Allerdings ist der Vektor d***s*** dem Vektor d***r*** entgegengesetzt gerichtet, da die Bewegung in Richtung abnehmendem r erfolgt: d***s*** = - d***r***.

In einem Punkt mit der Feldstärke ***E*** erfährt die Ladung q eine Kraft vom Betrag $F = E\,q$, also ist

$$W = -\int_{\infty}^{r} F\,\mathrm{d}\,r = -\frac{q\,Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}\,r = \frac{q\,Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left|\frac{1}{r}\right|_{\infty}^{r} = \ldots$$



Äquipotentialflächen einer Kugelladung

Damit erhalten wir für das Potential

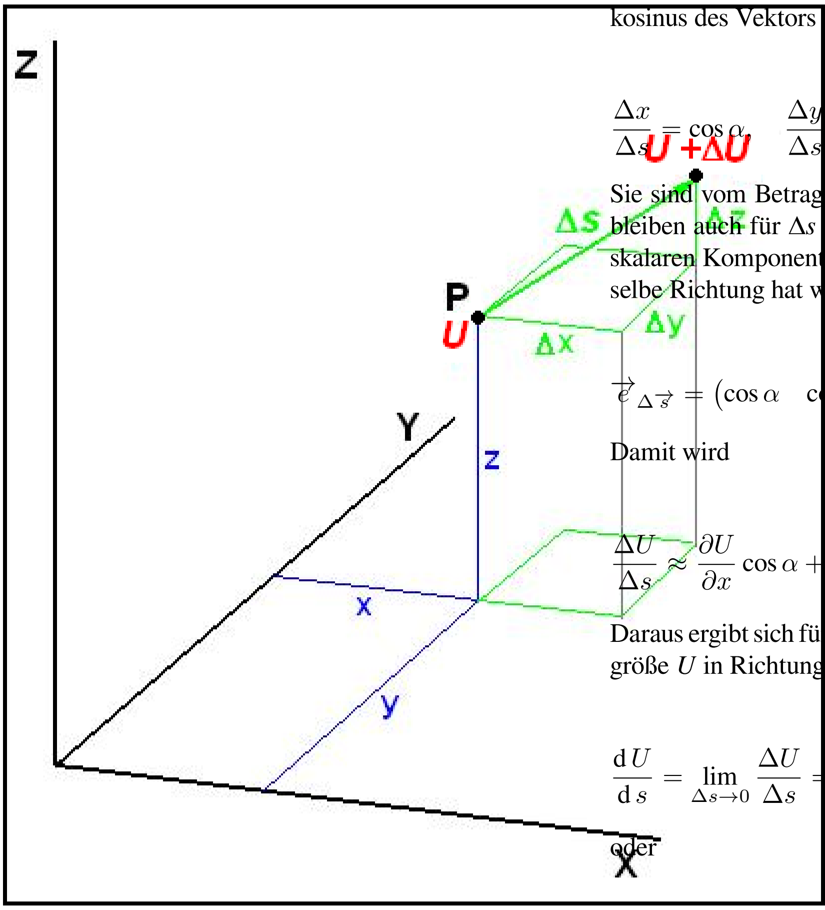
$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Da das Potential (definitionsgemäß) ein Skalar ist, ist das Potentialfeld ein Skalarfeld.

Für r = konst. ist auch φ = konst. Die Punkte gleichen Potentials liegen also auf einer Kugelfläche um O. Die »Äquipotentialflächen« oder »Niveauflächen« dieses Feldes sind also Kugeln (siehe Abbildung). Das elektrische Potential wird in Volt (V) gemessen.

5.2 Anstieg und Steigung einer skalaren Feldgröße

Wir begeben uns nun zu einem Punkt $P(x, y, z)$ eines Skalarfeldes mit der Feldgröße U(***r***) und fragen zunächst nach dem **Anstieg** ΔU der Feldgröße auf der Strecke Δ***s*** und dann nach der **mittleren Steigung** $\Delta U/\Delta s$ der Feldgröße auf derselben Strecke. (Die Feldgröße könnte z. B. die Temperatur, der Luftdruck oder das Potential eines Feldes sein.)



Dazu brauchen wir zunächst die Steigung der Feldgröße in Richtung der drei Koordinatenachsen.

Die Differentialrechnung liefert für die Steigung der Feldgröße U in Richtung der drei Koordinatenachsen im Punkt P:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \quad y,\ z \ \text{konst.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} \quad x,\ z \ \text{konst.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta z} \quad x,\ y \ \text{konst.}$$

Der **Anstieg** ΔU der Feldgröße U längs einer Strecke $\Delta\, \boldsymbol{s}$ = ($\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$) ist dann - dies ist ebenfalls ein Ergebnis der Differentialrechnung - für hinreichend kleine Δx, Δy, Δz

$$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z,$$

und die mittlere Steigung $\Delta U/\Delta s$ der Feldgröße U auf der Strecke $\Delta\, \boldsymbol{s}$ ist

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} \approx \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Die Quotienten $\Delta x/\Delta s$, $\Delta y/\Delta s$, $\Delta z/\Delta s$ sind die Richtungskosinus des Vektors $\Delta\, \boldsymbol{s}$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Sie sind vom Betrag Δs des Vektors $\Delta \boldsymbol{s}$ unabhängig und bleiben auch für Δs gegen null unverändert. Sie sind die skalaren Komponenten des Einheitsvektors $\boldsymbol{e}\Delta\boldsymbol{s}$, der dieselbe Richtung hat wie $\Delta\, \boldsymbol{s}$:

$$\vec{e}_{\Delta \vec{s}} = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma)$$

Damit wird

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} \approx \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Daraus ergibt sich für Δs gegen null die Steigung der Feldgröße U in Richtung $\Delta \boldsymbol{s}$:

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,s}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

5.3 Richtungsableitung und Gradient einer skalaren Feldgröße

Der soeben gefundene Term für die Steigung der Feldgröße U in der durch den Vektor (cos α cos β cos γ) beschriebenen Richtung kann interpretiert werden als das Skalarprodukt des Vektors

$$\vec{v} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

und des Vektors

$$\vec{e}_{\Delta \vec{s}} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ hat bemerkenswerte, für die Untersuchung von Feldern sehr nützliche Eigenschaften, weshalb er einen eigenen Namen erhalten hat: Gradient U (grad U). (»Gradient« ist ein aus einem lateinischen Stamm abgeleitetes Kunstwort, das man etwa mit »Steigungszeiger« übersetzen könnte.) Damit gilt für die so genannte **Richtungsableitung** der Feldgröße U in der Richtung des Vektors (cos α cos β cos γ)

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s} = \text{grad } U \cdot \vec{e}_{\Delta \vec{s}} = \text{grad } U \cdot \left(\vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma \right).$$

Die besonderen Eigenschaften des Vektors grad *U* ergeben sich so:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ***v*** und ***w*** ist gleich dem Produkt ihrer Beträge *v* und *w* und dem Kosinus des Winkels δ zwischen den beiden Vektoren:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v\,w\,\cos\delta.$$

Bei gegebenen Werten von *v* und *w* ist der Wert des Skalarprodukts maximal (nämlich gleich *u v*), wenn δ = 0 ist. Die Richtungsableitung (= Steigung) der Feldgröße *U* ist also dann am größten, wenn der Vektor ***e*Δ*s*** (oder der Vektor Δ ***s***) dieselbe Richtung wie der Vektor grad *U* hat. Anders herum gesagt:

Der Vektor grad *U* weist in die Richtung, in der die Feldgröße *U* die größte Steigung hat (am stärksten steigt).

Steht dagegen der Vektor ***e*Δ*s*** auf dem Vektor grad *U* senkrecht, dann ist d*U*/d*s* = 0. Das bedeutet, der Vektor ***e*Δ*s*** liegt in der Tangentialebene der Niveaufläche *U* = konst. des betrachteten Punktes *P*. Daraus folgt:

Der Vektor grad *U* steht auf der Niveaufläche durch den Punkt *P* senkrecht.

Ferner: Der Maximalwert der Steigung (oder der Richtungsableitung) ist der Maximalwert des obigen Skalarprodukts:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s}\right)_{\max} = |\text{grad } U| \cdot \left|\vec{e}_{\Delta \vec{s}}\right| = |\text{grad } U|\,.$$

Das bedeutet: **Der Betrag des Vektors grad *U* ist gleich dem Maximalwert der Steigung der Feldgröße im betrachteten Punkt.**

Beispiel: Gesucht ist der Gradient des Potentials φ einer elektrischen Punkt- (oder Kugel-)ladung *Q*.

Für das Potential gilt, wie früher gezeigt wurde,:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 \sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Die partiellen Ableitungen werden am einfachsten nach der Kettenregel gebildet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\,x, \quad \text{usw.}$$

$$\text{grad } \varphi = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r} = -\vec{E}$$

5.4 Rechengesetze für Gradienten

Es seien *U*, U_1 und U_2 skalare Ortsfunktionen, und C eine reelle Zahl. Dann gelten, wie man leicht zeigen kann, folgende Rechengesetze:

$$\text{grad C} = 0$$

$$\text{grad }(\mathrm{C}U) = \mathrm{C}\,\text{grad}\,U$$

$$\text{grad }(U_1 \pm U_2) = \text{grad } U_1 \pm \text{grad } U_2$$

$$\text{grad }(U_1\,U_2) = (\text{grad } U_1)\,U_2 + U_1 \text{ grad } U_2$$

$$\text{grad } U^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}\,U^{\mathrm{n}-1}\,\text{grad } U$$

$$\text{grad } f(U) = \frac{\mathrm{d}f(U)}{\mathrm{d}\,U}\,\text{grad } U$$

6 Potentialfelder

Die Physik lehrt, dass elektrostatische Felder und stationäre Gravitationsfelder - unabhängig von der Anzahl und der Anordnung der Ladungen bzw. Massen, die das Feld aufbauen - so genannte Potentialfelder sind. Das bedeutet: Um eine Ladung *q* bzw. eine Masse *m* aus unendlicher Entfernung zu einem bestimmten Punkt *P* des Feldes zu bringen, ist eine (positive oder negative) Arbeit aufzuwenden, die unabhängig von dem Weg ist, auf dem die Ladung bzw. die Masse transportiert wird.

Da die aufzuwendende Arbeit proportional der Ladung bzw. Masse ist, erhält man eine nur von der Lage des Punktes *P* abhängige skalare Größe, wenn man die Arbeit durch die Ladung bzw. Masse dividiert. Diese Größe, also die »ladungs- bzw. massebezogene Arbeit«, heißt das **Potential** φ des Punktes *P*:

$$\text{Potential } \varphi(P) = \varphi(\vec{r}) = \frac{W}{q} \;\text{ bzw. }\; \frac{W}{m}.$$

6.1 Potential und Feldstärke

Der Vektor der Feldstärke ist definiert als die ladungs- bzw. massebezogene Kraft, die eine Ladung *q* bzw. eine Masse *m* in einem Punkt des Feldes erfährt:

$$\text{Feldst Elektrische\"arke} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

$$\text{Gravitationsfeldst\"arke} \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Wegen der formalen Übereinstimmung der entsprechenden Gleichungen für das elektrische Feld und das Gravitationsfeld und wegen der sich dadurch anbietenden Vereinfachung bezeichne ich im Folgenden die Feldstärke allgemein und neutral mit ***V***. Die Größe q kann fortan sowohl eine elektrische Ladung als auch eine »schwere Ladung«, das heißt eine Masse, bedeuten.

In einem Punkt *A* des Feldes habe das Potential den Wert φA, in einem Punkt *B* den Wert φB. Dann ist der Potentialunterschied der beiden Punkte

$$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{W_B}{q} - \frac{W_A}{q} = \frac{\Delta W_{AB}}{q}.$$

Dabei ist ΔWAB die Arbeit, die aufzuwenden ist, um die Ladung *Q* von *A* nach *B* zu transportieren. Für sie gilt:

$$\Delta W_{AB} \approx \overrightarrow{F}_A \cdot \Delta\overrightarrow{r}_{AB} = \overrightarrow{F}_A \cdot (\overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A)\,,$$

wobei ***F****A* die in *A* auf die Ladung wirkende Kraft sein soll. Damit wird

$$\Delta\varphi_{AB} \approx \frac{\overrightarrow{F}_A \cdot \Delta\overrightarrow{r}_{AB}}{q}.$$

Da die »arbeitende Kraft« der vom Feld auf die Ladung ausgeübte »Feldkraft« ***F***$\mathrm{F}_{\mathrm{eld}}$ entgegengesetzt gleich und andererseits ***F***$\mathrm{F}_{\mathrm{eld}}/q$ gleich der Feldstärke ***V*** ist, folgt

$$\Delta\varphi_{AB} \approx -\overrightarrow{V}_A \cdot \Delta\overrightarrow{r}_{AB} =$$

$$= -\left(V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k}\right)\left(\Delta x_{AB}\overrightarrow{i} + \Delta y_{AB}\overrightarrow{j} + \Delta z_{AB}\overrightarrow{k}\right) =$$

$$= -\left(V_x\Delta x_{AB} + V_y\Delta y_{AB} + V_z\Delta z_{AB}\right),$$

wobei Vx usw. die Komponenten des Vektors ***V*** an der Stelle *A* sind.

Wählt man $\Delta \boldsymbol{r}AB$ so, dass $\Delta yAB = \Delta zAB = 0$ ist, dann wird daraus

$$\Delta\varphi_{AB} \approx -V_x\Delta x_{AB} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\varphi_{AB}}{\Delta x_{AB}} \approx -V_x.$$

Lässt man *B* unbeschränkt gegen *A* rücken, so wird

$$\lim_{B\to A}\frac{\Delta\varphi_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = -V_x.$$

Analog findet man

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_A = -V_y \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_A = -V_z.$$

Daraus folgt weiter (jetzt ohne Indices geschrieben):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k} = -V_x\overrightarrow{i} - V_y\overrightarrow{j} - V_z\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{V}.$$

Der Term auf der linken Seite aber ist der Vektor grad φ. Daher gilt für jedes beliebige Potentialfeld

$$\text{grad}\ \varphi = -\overrightarrow{V}.$$

Umgekehrt gelesen:

Der Feldstärkevektor eines jeden Potentialfeldes ist gleich dem negativen Gradienten des Potentials.

6.2 Verschiebungsarbeit in einem Potentialfeld

In einem Potentialfeld werde eine Ladung q gegen die Kraft des Feldes von *A* nach *B* verschoben. Die dazu aufzuwendende Arbeit ist

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{r}$$

und wegen

$$\overrightarrow{F} = -q\,\overrightarrow{V} = q\ \text{grad}\ \varphi$$

$$W = q\int_A^B \text{grad}\ \varphi \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{r}$$

$$= q\int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)\left(\mathrm{d}\,x\,\overrightarrow{i} + \mathrm{d}\,y\,\overrightarrow{j} + \mathrm{d}\,z\,\overrightarrow{k}\right)$$

$$= q\int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}\,y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}\,z\right) = q\int_A^B \mathrm{d}\,\varphi = q\,(\varphi_B - \varphi_A)\,.$$

(Der Integrand ist das vollständige Differential dφ des nur vom Ort abhängigen Potentials $\varphi = \varphi$(x, y, z).)

Also:

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{r} = q\,(\varphi_B - \varphi_A)\,.$$

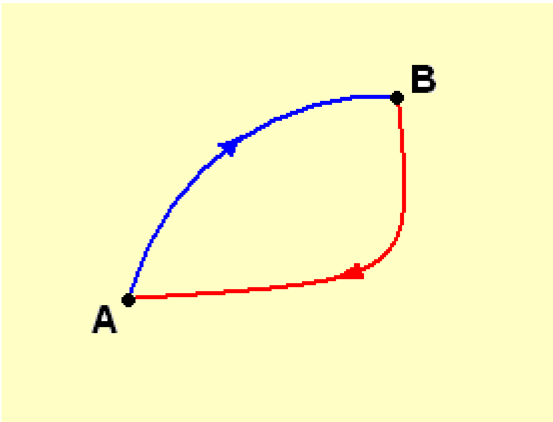
Die Arbeit *W* hängt also nur vom Potential des Anfangs- und Endpunktes des Weges ab, nicht aber vom Verlauf des Weges; das entsprechende Linienintegral ist »wegunabhängig«.

Wird die Ladung q zunächst auf einem beliebigen Weg von A nach B gebracht und danach auf einem anderen Weg von B zurück nach A, so ist

$$W_{AB} = q\left(\varphi_B - \varphi_A\right) \quad \text{und} \quad W_{BA} = q\left(\varphi_A - \varphi_B\right)$$

und daher

$$W_{ABA} = W_{AB} + W_{BA} = 0.$$



Das heißt: Das Linienintegral wird null, wenn man es über einen geschlossenen Weg bildet.

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{r} = 0$$

Zusammenfassung:

In einem Vektorfeld,

- zu dem ein Potentialfeld gehört,
- oder, was dasselbe ist, dessen Feldvektor der negative Gradient eines Skalarfeldes ist,

ist das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg gleich null.

Das bedeutet, dass man durch Herumführen einer Ladung auf einem geschlossenen Weg weder Arbeit gewinnen kann noch Arbeit investieren muss.

Ein solches Vektorfeld und die in ihm auf eine Ladung ausgeübte Kraft heißen *konservativ*.

Welche Bedingungen muss der Feldvektor V erfüllen, damit er der negative Gradient eines Skalarfeldes mit der Feldfunktion $U(x, y, z)$ sein kann?

Wenn

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = -\ \mathrm{grad}\ U \equiv -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

sein soll, muss

$$V_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

sein. Diese Forderung ist keineswegs selbstverständlich oder trivial, denn Vx, Vy und Vz können im Allgemeinen drei von einander völlig unabhängige Funktionen sein.

Nach dem Satz von SCHWARZ muss

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y}$$

und

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z}$$

sein. Das heißt: Bei der Bildung der zweiten partiellen Ableitung nach verschiedenen Variablen ist die Reihenfolge beliebig.

Auf unser Problem angewendet, bedeutet das: Wenn der Feldvektor $\boldsymbol{V}$ der negative Gradient eines Skalarfeldes mit der Feldfunktion U sein soll, muss

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

sein. Dann und nur dann ist ($Vx\,\mathrm{d}x + Vy\,\mathrm{d}y + Vz\,\mathrm{d}z$) das vollständige Differential $\mathrm{d}U$ einer Funktion U, und nur dann kann daraus durch Integration eine Funktion U bestimmt werden, deren negativer Gradient dann der Vektor $\boldsymbol{V}$ ist. (Und nur dann ist auch der Wert des Arbeitsintegrals vom Weg unabhängig.)

Später wird sich zeigen, dass die oben beschriebene Bedingung identisch ist mit der Forderung, dass das Feld mit dem Feldvektor $\boldsymbol{V}$ wirbelfrei ist, (d. h., dass überall rot $\boldsymbol{V}$ = 0 ist.)

Beispiel:

Der Feldvektor

$$\overrightarrow{V} = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{r} = \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

erfüllt – wie man leicht durch Rechnung bestätigen kann - die oben beschriebene »Integrabilitätsbedingung«, und es ist

$$U = \frac{1}{r} + \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mathrm{C}.$$

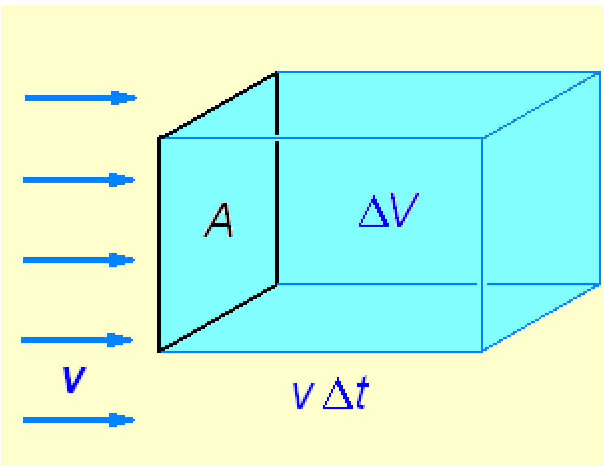
Hier gibt es eine PDF-Version.

7 Die Divergenz eines Feldvektors

7.1 Vorbereitende Betrachtungen: Fluss, Schüttung, Quelldichte

Gegeben sei ein »Strömungsfeld« mit dem Feldvektor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit ist.

Stellen wir uns ein von einem Drahtrahmen umgrenztes ebenes Flächenstück vom Größenwert A vor, das so in die Flüssigkeit eintaucht, dass es auf der zunächst als homogen angenommenen Strömung senkrecht steht.



Dann strömt in der Zeitspanne Δt das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V = v{\cdot}\Delta t{\cdot}A$ durch den Rahmen. Der Quotient aus diesem Volumen und der Zeitspanne Δt heißt der Fluss $\boldsymbol{\Phi}$ der Strömung (oder auch – nicht ganz exakt, aber gebräuchlich - der Fluss $\boldsymbol{\Phi}$ des Feldvektors $\boldsymbol{v}$) durch das Flächenstück:

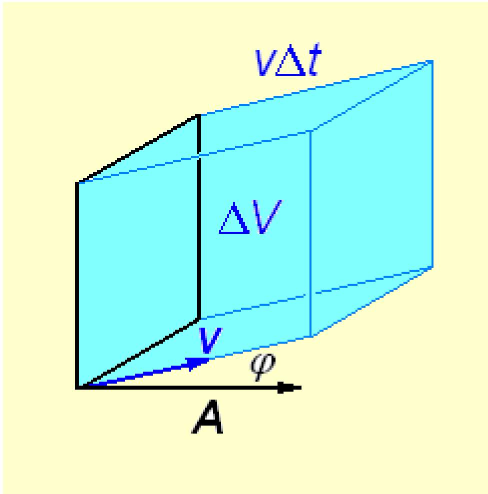
$$\text{Fluss } \Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta t\,A}{\Delta t} = v\,A\,.$$

Der Fluss hat demnach die Dimension Volumen/Zeit =Länge^3/Zeit.

Steht das Flächenstück auf der Strömungsrichtung nicht senkrecht, dann ist

$$\Delta V = v\,\Delta t\,A\,\cos\varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ und dem auf der Fläche senkrecht stehenden Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ ist.



Dann ist der Fluss durch das Flächenstück

$$\Phi = v\,A\,\cos\varphi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\,,$$

wobei $\boldsymbol{v}{\cdot}\boldsymbol{A}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{A}$ ist.

Ist schließlich das betrachtete Flächenstück nicht eben, oder ist das Strömungsfeld nicht homogen, dann denken wir uns die Fläche in hinreichend kleine Teilstücke vom Größenwert ΔA zerlegt und den Flächenvektor $\Delta\boldsymbol{A}$ in der Mitte eines jeden Teilstücks errichtet. Jeder dieser Flächenvektoren wird dann skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor multipliziert, der dem Fußpunkt des Flächenvektors zugeordnet ist. Für den Fluss $\boldsymbol{\Phi}$ durch die gesamte Fläche A gilt dann:

$$\Phi \approx \sum \vec{v}\cdot\Delta\vec{A}\,.$$

Denkt man sich nun die Anzahl der Teilflächen unbegrenzt wachsend, wobei ΔA gegen null geht, dann strebt diese Summe einem Grenzwert zu, welcher der Fluss der Strömung (oder, wie man etwas nachlässig sagt, der Fluss des Vektors $\boldsymbol{v}$) durch die Fläche A ist und durch ein Flächenintegral dargestellt wird:

$$\Phi_A = \lim_{\Delta A\to 0}\sum \vec{v}\cdot\Delta\vec{A} = \int_A \vec{v}\;\mathrm{d}\,\vec{A}\,.$$

Dieser Begriff des Flusses wird in der Physik auch auf andere Vektorfelder übertragen, vor allem auf elektrische und magnetische Felder. Dies mag zunächst etwas befremden, aber man kann ja – als Hilfe für die Vorstellung - jeden beliebigen Feldvektor als den Geschwindigkeitsvektor einer Flüssigkeitsströmung interpretieren. Man muss dann lediglich, wann immer vom Fluss eines Feldvektors die Rede ist, sich vergegenwärtigen, dass damit eigentlich der Fluss einer »virtuellen Flüssigkeit« gemeint ist, deren Geschwindigkeitsvektor der betrachtete Feldvektor ist. Dazu das folgende Beispiel.

Der »Fluss des Feldvektors«

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{r}$$

des zentralsymmetrischen Feldes einer Punkt- oder Kugelladung mit dem Mittelpunkt in *O* durch eine konzentrische Kugelfläche mit dem Radius *R* ist

$$\Phi = \int_A \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{A} = \int_A E \cdot \mathrm{d}\,A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R^2}\int_A \mathrm{d}\,A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R^2}4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

(Hinweis: Der Feldvektor steht überall auf der Kugelfläche senkrecht.)

Also: Wenn ***E*** der Geschwindigkeitsvektor eines Strömungsfeldes wäre, betrüge der Fluss der Flüssigkeit durch jede zur Ladung *Q* konzentrische Kugelfläche Q/ε_0. Der Fluss ist der Ladung also proportional, und für $Q = 0$ wäre auch $\Phi = 0$. Demnach könnte man die Ladung *Q* als die »Quelle« des Feldes der virtuellen Flüssigkeit betrachten. Für $Q < 0$ wäre auch $\Phi < 0$. Dies wäre so zu interpretieren: Der Geschwindigkeitsvektor ist - wie die Feldlinien des Feldes – nach innen gerichtet und bildet mit den Flächennormalen der Kugel überall den Winkel 180°, weshalb das Skalarprodukt $\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -E\,\mathrm{d}A$ ist. Die negative Ladung ist dann die »Senke« (= Gegenteil einer Quelle) des Feldes.

Das Ergebnis $\Phi = Q/\varepsilon_0$ gilt übrigens, wie sich zeigen lässt und was auch durchaus plausibel erscheint, für jede beliebige, die Ladung *Q* umhüllende Fläche.

Zur Vereinfachung betrachte ich im Folgenden wieder einen »echten« Geschwindigkeitsvektor ***v*** eines Strömungsfeldes, jedoch gelten die Betrachtungen und ihre Ergebnisse für jedes beliebige Vektorfeld und sein virtuelles Strömungsfeld.

Integriert man das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ über eine geschlossene Fläche (»Hülle«), so ist der Wert des »Hüllenintegrals« gleich dem Fluss (Volumen/Zeit), der durch die Hülle nach außen tritt. Dieser muss gleich der »Schüttung« *S* (= Ergiebigkeit) aller innerhalb der Hülle liegenden Quellen sein, wobei die Senken einen negativen Beitrag zur Schüttung liefern:

$$\oint_A \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{A} = S = \sum S_i.$$

Betrachten wir nun ein Raumgebiet vom Volumen ΔV. Die Schüttung aller Quellen in diesem Raumgebiet sei ΔS. Der Quotient $\Delta S/\Delta V$ ist dann die »mittlere Quelldichte« in diesem Gebiet:

$$\text{Mittlere Quelldichte } \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\oint_A \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{A}\,.$$

7.2 Die Divergenz eines Feldvektors

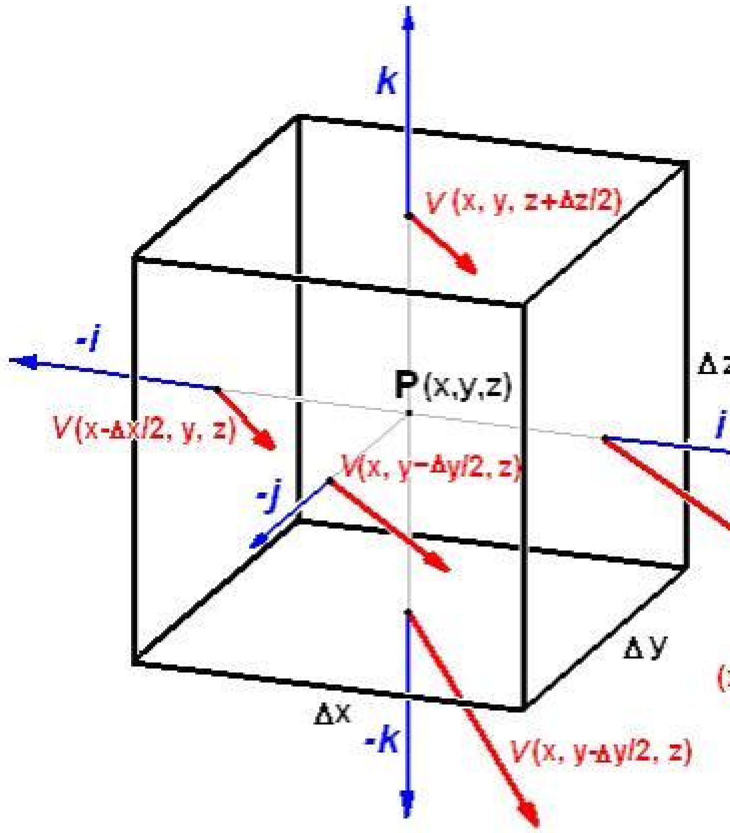
Lässt man nun die Hüllfläche auf einen Punkt *P* schrumpfen und somit ΔV gegen null gehen, so ist der Grenzwert

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_A \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{A}$$

die Quelldichte des Feldvektors (eigentlich: des Strömungsfeldes, dessen Geschwindigkeitsvektor ***v*** ist) in dem Punkt *P*, auf den die Hülle geschrumpft ist. Sie wird als die Divergenz des Vektors ***v*** im Punkt *P* bezeichnet:

$$(\mathrm{div}\ \overrightarrow{v})_P = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_A \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{A}\,.$$

Zur **Berechnung der Divergenz** aus dem Feldvektor ***v*** = (*vx vy vz*) betrachten wir einen Quader mit den Seiten Δx, Δy, Δz, dessen Mittelpunkt der Punkt *P* (*x, y, z*) ist.



Die Flächennormalen auf den Seitenflächen sind die Einheitsvektoren in Achsenrichtung: ***i, j, k*** sowie ***-i, -j, -k***. (***j*** und der dazu gehörige Feldvektor sind nicht eingezeichnet.)

Die Flüsse durch die einzelnen Seitenflächen sind:

$$\Delta\,\Phi_1 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{v}_{(x+\frac{\Delta x}{2},\,y,\,z)}\Delta y\;\Delta z = (v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)}\;\Delta y\;\Delta z,$$

$$\Delta\,\Phi_2 = -\mathbf{i}\cdot\mathbf{v}_{(x-\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)}\Delta y\;\Delta z = -\,(\,v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)}\;\Delta y\;\Delta z,$$

Der gesamte Fluss $\Delta\Phi$ durch die Flächen des Quaders ist die Summe aus diesen sechs Flüssen. Er entspricht dem Wert des Hüllenintegrals in der Definition der Divergenz. Von den sechs Summanden lassen sich je zwei wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 &= \left[(v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)} - (v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)}\right]\Delta y\,\Delta z\\ &= \frac{(v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)} - (v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}\,,\,y\,,\,z)}}{\Delta x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\end{aligned}$$

Der Bruch auf der rechten Seite ist der »partielle Differenzenquotient« der Funktion *vx* für *y* = konst. und *z* = konst. Für Δx gegen 0 wird daraus die partielle Ableitung von *vx* nach *x*. Zusammen mit den übrigen vier Summanden ergibt sich dann

$$\text{div}\;\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_A \vec{v}\;\mathrm{d}\,\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{\Delta V}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

und mit $\Delta x\;\Delta y\;\Delta z = \Delta V$

$$\text{div}\;\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\;.$$

7.3 Rechengesetze für Divergenzen

$\text{div}\;\vec{C} = 0 \quad \vec{C}$: konstanter Vektor

$\text{div}\;c\vec{v} = c\;\text{div}\;\vec{v} \quad c$: relle Zahl

$\text{div}\;(\vec{v} + \vec{w}) = \text{div}\;\vec{v} + \text{div}\;\vec{w}$

$\text{div}\;(U\,\vec{v}) = U\;\text{div}\;\vec{v} + \vec{v}\;\text{grad}\;U \quad U = U\,(x,y,z)$

$\text{div}\,(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\;\text{rot}\;\vec{v} - \vec{v}\;\text{rot}\;\vec{w}$

7.4 Beispiele

1. Gegeben ein Vektorfeld mit dem Feldvektor ***v***(***r***) = ***r***.

Der Feldvektor ist also radial nach außen gerichtet, seine Länge ist gleich der Länge des Ortsvektors des betreffenden Punktes. Dann ist:

$$\text{div}\;\vec{r} = \text{div}\;\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} = \frac{\partial\,x}{\partial\,x} + \frac{\partial\,y}{\partial\,y} + \frac{\partial\,z}{\partial\,z} = 3.$$

Wir verifizieren an diesem Beispiel den GAUSS-Integralsatz

$$\int_V \text{div}\;\vec{v}\;\mathrm{d}\,V = \oint_A \vec{v}\;\mathrm{d}\,\vec{A}$$

an einer Kugel vom Radius *R* um den Ursprung.

In Worten lautet der GAUSS-Integralsatz: Die Ergiebigkeit der Quellen in einem Raumgebiet *V* ist gleich dem Fluss durch dessen Hüllfläche.

Der Fluß Φ durch ihre Oberfläche ist *Φ* = 4 π *R*² *R* = 4 π R³.

Die Ergiebigkeit *S* aller innerhalb der Kugel liegenden Quellen ist *S* = *V* div ***r*** = 3 *V* = 4 π R³.

2. Es sei ***v***(***r***) = ***r***/*r*.

Der Feldvektor ist also radial nach außen gerichtet und hat die konstante Länge 1. Dann ist:

$$\text{div}\;\frac{\vec{r}}{r} = \text{div}\;\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix},$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r} = \frac{r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial r}{\partial x}$

berechnet man am einfachsten durch implizite Ableitung aus:

$$r^2 = x^2{+}y^2{+}z^2\;: \qquad 2\,r\,\partial r = 2\,x\,\partial x \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Analog findet man

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\text{div}\;\frac{\vec{r}}{r} = \frac{3r - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}}{r^2} = \frac{2}{r}.$$

Test:

Der Fluss des Vektors ***v*** = ***r***/*r* durch die Oberfläche einer Kugel um O mit dem Radius *R* ist

$$\Phi_K = 4\pi R^2\cdot 1 = 4\pi R^2.$$

Das Volumen einer Kugelschale vom Radius *r* und der Dicke d*r* ist

$$\mathrm{d}\,V = 4\pi r^2\;\mathrm{d}\,r$$

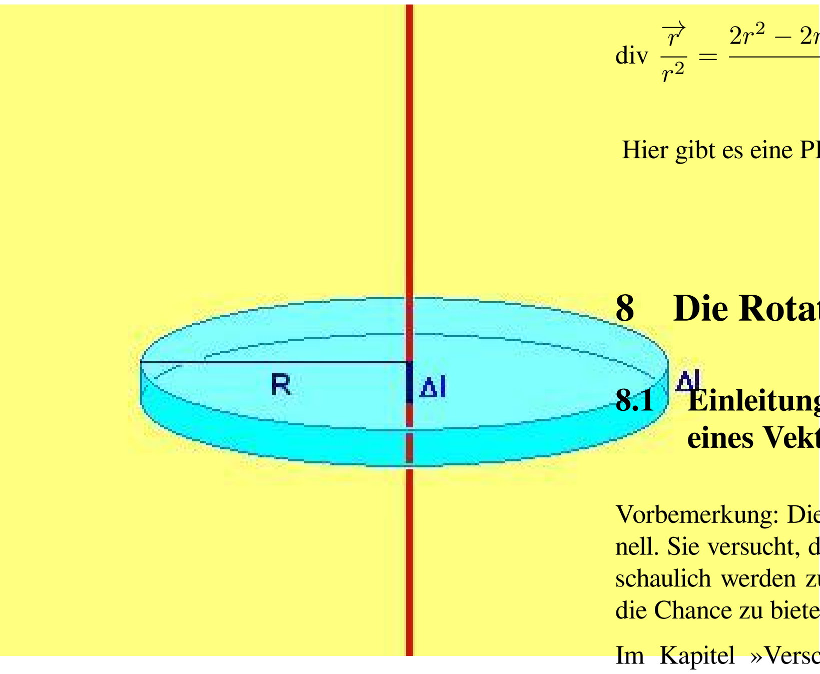
Die Ergiebigkeit der in der Kugelschale liegenden Quellen ist

$$\mathrm{d}\,S = \mathrm{d}\,V \cdot \mathrm{div}\ \vec{v} = 4\pi r^2\,\mathrm{d}\,r\frac{2}{r} = 8\pi\ r\,\mathrm{d}\,r.$$

Die Ergiebigkeit *S* der Quellen in einer Kugel vom Radius *R* ist dann

$$S = \int_0^R 8\pi\ r\ \ \mathrm{d}\,r = \left[8\pi\frac{r^2}{2}\right]_0^R = 4\pi R^2 = \Phi_K$$

3. Dieses Beispiel ist von ganz anderer Natur als die vorangegangenen. Hier ist kein Feld vorgegeben, dessen Eigenschaften untersucht werden sollen, sondern eine physikalische Anordnung, ein sehr langer, elektrisch geladener Leiter, dessen Feld gesucht ist.



Wir betrachten ein Leiterelement Δl und eine Kreisscheibe mit Radius *R* um dieses Leiterelement. Die im Leiterelement vorhandene elektrische Ladung sei Δq, die »Ladungsdichte« ρ also $\Delta q/\Delta l$. Weiter oben haben wir gesehen, dass der von einer Ladung *Q* erzeugte Fluss Φ des Vektors ***E*** = gleich Q/ε_0 ist.

Der von der Ladung Δq erzeugte Fluss $\Delta\Phi$ des Vektors ***E*** verlässt die Kreisscheibe nur an deren senkrechter Umrandung, welche die Fläche $\Delta A = 2\pi R\ \Delta l$ hat. Da der Fluss auf der Umrandung stets senkrecht steht, gilt für die Feldstärke am Rand

$$E_R = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0 2\pi R\,\Delta l} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 2\pi R} \quad \text{mit } \rho = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Da ***E*** radial nach außen gerichtet ist, ist

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 2\pi r^2}\vec{r}\,.$$

Wir berechnen nun noch div ***E***, die außerhalb des Leiters überall null sein muss:

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \mathrm{div}\ \frac{\rho}{\varepsilon_0 2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2},$$

$$\mathrm{div}\ \frac{\vec{r}}{r^2} = \mathrm{div}\ \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{r^2} = \frac{r^2 - x\,2r\frac{\partial r}{\partial x} + r^2 - y\,2r\frac{\partial r}{\partial y}}{r^4},$$

$$\mathrm{div}\ \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{2r^2 - 2r\left(x\frac{x}{r} + y\frac{y}{r}\right)}{r^4} = \frac{2r^2 - 2r^2}{r^4} = 0.$$

Hier gibt es eine PDF-Version.

8 Die Rotation eines Feldvektors

8.1 Einleitung - Zirkulation und Wirbel eines Vektors

Vorbemerkung: Diese Einleitung ist etwas unkonventionell. Sie versucht, die Begriffe und Zusammenhänge anschaulich werden zu lassen und dem Anfänger dadurch die Chance zu bieten, sie wirklich zu verstehen.

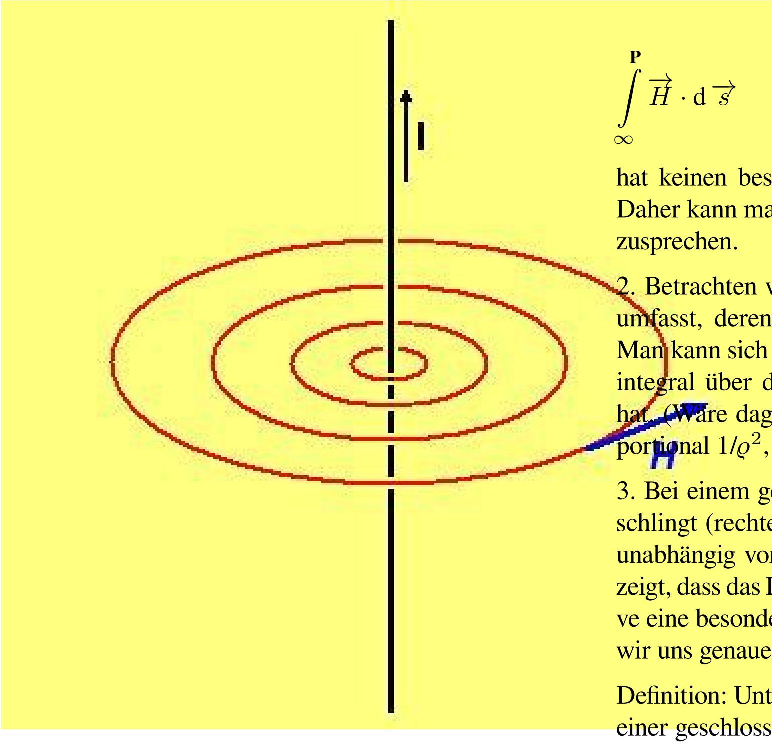
Im Kapitel »Verschiebungsarbeit ...« (Vektoranalysis: Teil II) wurde gezeigt, dass das Linienintegral über das Skalarprodukt ***v***·d***s*** gleich null ist,

- wenn das Integral sich über eine geschlossene Kurve erstreckt und

- wenn ein Potentialfeld vorliegt, d. h. wenn der Vektor ***v*** der Gradient eines Skalarfeldes ist.

Letzteres ist jedoch keineswegs immer der Fall, und auch in der Physik gibt es wichtige Felder, die diese Bedingung nicht erfüllen.

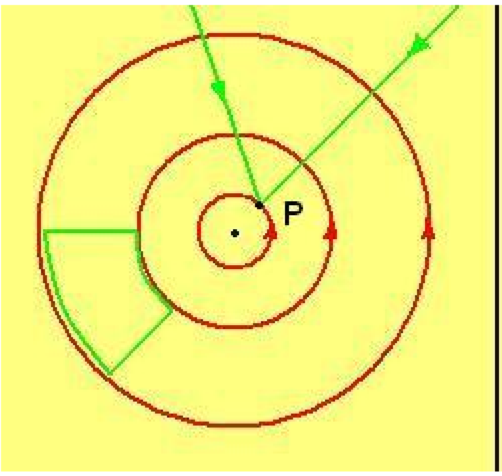
Ein Beispiel dafür ist das magnetische Feld eines unendlich langen Leiters (Stromstärke *I*).

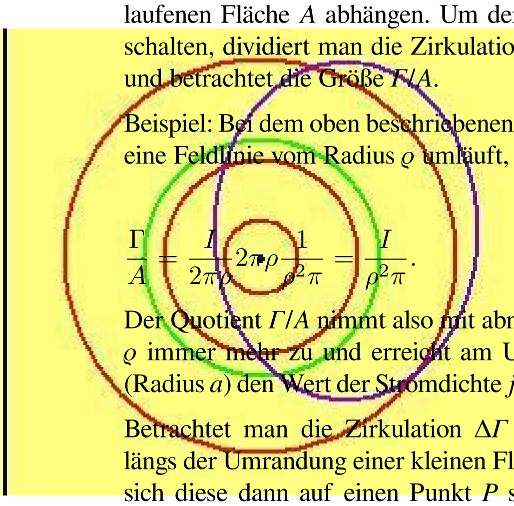


Der Leiter ist von konzentrischen kreisförmigen Feldlinien umgeben; der Vektor ***H*** der Feldstärke steht auf dem Radius ϱ senkrecht, für seinen Betrag H gilt:

$$H = \frac{I}{2\pi\,\rho}$$

Es lohnt sich, dieses Feld etwas genauer zu betrachten und einige Überlegungen anzustellen.





1. Bewegt man einen Magnetpol (linkes Bild) aus sehr großer (unendlicher) Entfernung radial zu irgendeinem Punkt P hin, so ist dabei keine (positive oder negative) Arbeit zu erbringen. Erfolgt die Bewegung jedoch schräg, so hat der Weg eine Komponente in Richtung des Feldes, und es ist daher Arbeit aufzuwenden. Das Linienintegral

$$\int_{\infty}^{\mathrm{P}} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

hat keinen bestimmten, vom Weg unabhängigen Wert. Daher kann man dem Punkt P kein bestimmtes Potential zusprechen.

2. Betrachten wir eine Linie, die eine viereckige Fläche umfasst, deren Seiten radial bzw. tangential verlaufen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das Linienintegral über den geschlossenen Umlauf den Wert null hat. (Wäre dagegen der Betrag der Feldstärke z. B. proportional $1/\varrho^2$, wäre das nicht so.)

3. Bei einem geschlossenen Umlauf, der den Leiter umschlingt (rechtes Bild), hat das Linienintegral dagegen – unabhängig vom Weg - den Wert I (Stromstärke). Dies zeigt, dass das Linienintegral über eine geschlossene Kurve eine besondere Bedeutung haben kann. Darum wollen wir uns genauer mit ihm befassen.

Definition: Unter der Zirkulation Γ eines Vektors ***v*** längs einer geschlossenen Kurve K versteht man das Linienintegral des Vektors längs dieser Kurve:

$$\Gamma = \oint_K \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

Beispiel: Wie oben gezeigt wurde, ist die Zirkulation des Feldstärkevektors ***H*** längs einer Feldlinie des Feldes eines unendlich langen Leiters gleich der Stromstärke I im Leiter. Umfasst dagegen die Kurve K den Leiter nicht, ist die Zirkulation null.

Im Allgemeinen wird die Zirkulation auch von der umlaufenen Fläche A abhängen. Um deren Einfluss auszuschalten, dividiert man die Zirkulation durch die Fläche und betrachtet die Größe Γ/A.

Beispiel: Bei dem oben beschriebenen Feld ist, wenn man eine Feldlinie vom Radius ϱ umläuft,

$$\frac{\Gamma}{A} = \frac{I}{2\pi\rho}\,2\pi\rho\,\frac{1}{\rho^2\pi} = \frac{I}{\rho^2\pi}.$$

Der Quotient Γ/A nimmt also mit abnehmendem Radius ϱ immer mehr zu und erreicht am Umfang des Leiters (Radius a) den Wert der Stromdichte $j = I/\pi\,a^2$ im Leiter.

Betrachtet man die Zirkulation $\Delta\Gamma$ des Feldvektors ***v*** längs der Umrandung einer kleinen Fläche ΔA und denkt sich diese dann auf einen Punkt P schrumpfend, dann wird der Quotient $\Delta\Gamma/\Delta A$ dabei im Allgemeinen einem Grenzwert zustreben. Diesen Grenzwert nenne ich den Wirbel w des Vektors ***v*** in P:

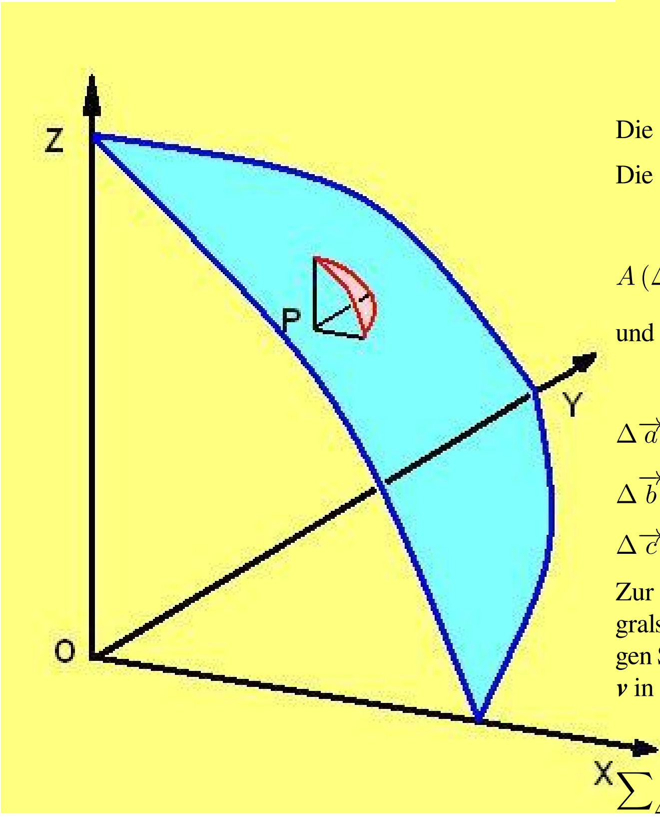
$$w_{\mathrm{P}} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\,\Gamma}{\Delta A} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\oint_{\Delta \mathrm{A}} \vec{v}\;\mathrm{d}\,\vec{s}}{\Delta A}$$

Beispiel: Lässt man bei dem oben betrachteten Feld den Radius ρ des Kreises gegen null gehen, also auf den Leitermittelpunkt hin schrumpfen, so wird für den Stromfaden von punktförmigem Querschnitt der Wirbel $w = j$.

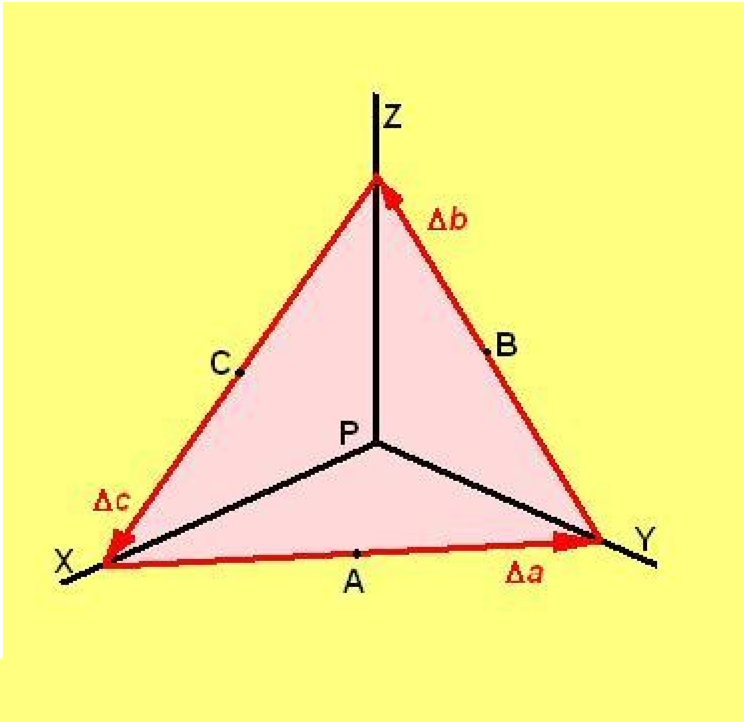
8.2 Berechnung des Wirbels – Die Rotation

Es soll nun der Wirbel in einem Punkt einer gegebenen Fläche berechnet werden.

In einem Raumgebiet, in dem durch eine Funktion $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld definiert ist, befinde sich ein Flächenstück.



Durch einen Punkt P nahe an der Fläche legen wir ein kleines Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den entsprechenden Achsen des großen Koordinatensystems sind. Die Ebenen des kleinen Koordinatensystems schneiden aus der Fläche ein kleines Flächenstück heraus, das wir durch ein ebenes Dreieck annähern.



Die Abschnitte auf den Achsen seien $2\Delta x$, $2\Delta y$, $2\Delta z$.

Die Seitenmitten des Dreiecks sind dann

$$A\,(\Delta x,\ \Delta y,\ 0)\,; \quad B\,(0,\ \Delta y,\ \Delta z)\,; \quad C\,(\Delta x, 0,\ \Delta z)\,;$$

und seine Seitenvektoren

$$\Delta\vec{a} = -2\,\Delta x\,\vec{i} + 2\,\Delta y\,\vec{j}\,,$$

$$\Delta\vec{b} = -2\,\Delta y\,\vec{j} + 2\,\Delta z\,\vec{k}\,,$$

$$\Delta\vec{c} = 2\,\Delta x\,\vec{i} - 2\,\Delta z\,\vec{k}\,.$$

Zur (zunächst) angenäherten Berechnung des Linienintegrals über die drei Seiten multiplizieren wir den jeweiligen Seitenvektor skalar mit dem Wert, den der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ in der Seitenmitte hat:

$$\sum_\Delta \vec{v}\cdot \mathrm{d}\,\vec{s} \approx \vec{v}_A\cdot\Delta\vec{a} + \vec{v}_B\cdot\Delta\vec{b} + \vec{v}_C\cdot\Delta\vec{c}\,.$$

Für die Vektoren $\boldsymbol{v}A$, $\boldsymbol{v}B$ und $\boldsymbol{v}C$ gilt:

$$\vec{v}_A \approx \vec{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,s}\right)_{PA}\cdot(\Delta s)_{PA}\,,$$

$$\vec{v}_B \approx \vec{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,s}\right)_{PB}\cdot(\Delta s)_{PB}\,,$$

$$\vec{v}_C \approx \vec{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,s}\right)_{PC}\cdot(\Delta s)_{PC}\,.$$

Der Index PA bedeutet:

bei der Richtungsableitung d***v***/d*s* dass diese an der Stelle *P* und in der Richtung *PA* zu bilden ist,

bei Δ*s*, dass damit die Strecke Δ*s* = *PA* gemeint ist.

Zur Berechnung werden die drei »Ungefährgleichungen« in ihre Komponenten zerlegt:

$$(v_x)_A \approx (v_x)_P + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0)$$

Dabei sind – wie auch im Folgenden – alle partiellen Ableitungen an der Stelle *P* zu bilden.

Ferner ist:

$$(v_y)_A \approx (v_y)_P + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0)$$

$$(v_z)_A \approx (v_z)_P + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0)$$

Analoges gilt für die Komponenten von ***vB*** und ***vC***.

Wenn man die zusammengehörigen Komponentengleichungen wieder zu einer Vektorgleichung zusammenfasst, erhält man:

$$\vec{v}_A \approx \vec{v}_P + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_B \approx \vec{v}_P + \begin{pmatrix} 0 + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ 0 + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ 0 + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_C \approx \vec{v}_P + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + 0 + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + 0 + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + 0 + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{v}_A \Delta\vec{a} \approx \vec{v}_P \Delta\vec{a} + \left(\tfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y\right)(-2\Delta x) + \left(\tfrac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\right) 2\Delta y,$$

$$\vec{v}_B \Delta\vec{b} \approx \vec{v}_P \Delta\vec{b} + \left(\tfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \tfrac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z\right)(-2\Delta y) + \left(\tfrac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \tfrac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\right) 2\Delta z,$$

$$\vec{v}_C \Delta\vec{c} \approx \vec{v}_P \Delta\vec{c} + \left(\tfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z\right) 2\Delta x + \left(\tfrac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\right)(-2\Delta z).$$

Die Summe Σ dieser drei Skalarprodukte ist

$$\sum \approx \vec{v}_P\left(\Delta\vec{a} + \Delta\vec{b} + \Delta\vec{c}\right) + \left(\tfrac{\partial v_y}{\partial x} - \tfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) 2\Delta x\Delta y + \left(\tfrac{\partial v_z}{\partial y} - \tfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) 2\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) 2\Delta x\Delta z.$$

Dabei sind alle partiellen Ableitungen im Punkt *P* zu bilden.

Der erste Summand ist null, da die Summe der Seitenvektoren des Dreiecks null ist.

Die letzten drei Summanden können interpretiert werden als das Skalarprodukt aus einem Vektor ***V*** und einem Vektor Δ ***W***:

$$\vec{V}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta\vec{W} = \begin{pmatrix} 2\ \Delta y\ \Delta z \\ 2\ \Delta z\ \Delta x \\ 2\ \Delta x\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Der erste Vektor erhält wegen seiner besonderen Bedeutung einen eigenen Namen: Rotation (von) ***v*** (geschrieben: rot ***v***).

Die Komponenten des zweiten Vektors sind die Projektionen der Fläche Δ*A* in die Koordinatenebenen: Δ*Wx* = Δ*Ax*, Δ*Wy* = Δ*Ay*, Δ*Wz* = Δ*Az*.

Das heißt: Der Vektor Δ***W*** ist identisch mit dem Flächenvektor Δ***A***. Dieser Vektor kann auch geschrieben werden als

Δ ***A*** = Δ*A* ***n***

wobei ***n*** der Normaleneinheitsvektor der Fläche Δ ***A*** ist.

Folglich ist

$$\sum_{\Delta} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} \approx (\text{rot}\ \vec{v})_P \cdot \Delta A\ \vec{n}$$

und

$$\frac{1}{\Delta A}\sum_{\Delta} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} \approx \vec{n} \cdot (\text{rot}\ \vec{v})_P\,.$$

Lässt man nun den Punkt *P* unbeschränkt an die Fläche heranrücken, dann gehen Δ*A* und die Summe gegen null. Für den Grenzwert des Quotienten gilt:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\sum_{\Delta} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}}{\Delta A} = \vec{n} \cdot (\text{rot}\ \vec{v})_P\,.$$

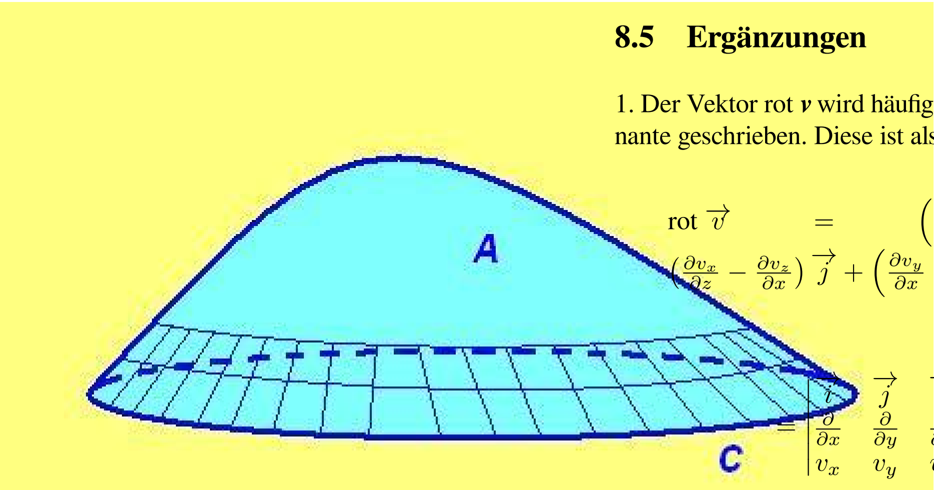
Das heißt: Der Wirbel w des Feldvektors ***v*** im Punkt *P* einer Fläche ist gleich der Projektion des Vektors rot ***v*** an dieser Stelle auf die Flächennormale.

Beachten Sie: Der Vektor rot ***v*** ist nur eine Funktion des Ortsvektors ***r***(*x*, *y*, *z*), während der Wirbel auch von der

Richtung der Fläche abhängt, für die der Wirbel berechnet wird. Der Wirbel an einer bestimmten Stelle ist maximal, wenn die Fläche auf rot ***v*** senkrecht steht; er ist null, wenn der Vektor rot ***v*** in der Tangentialebene der Fläche liegt.

8.3 Der Integralsatz von STOKES

Wir betrachten ein beliebiges Flächenstück *A* mit dem Rand *C*.



Wir zerlegen die Fläche – wie in der Abbildung angedeutet – in kleine Flächenstücke Δ*Ai* mit den nach außen gerichteten Flächenvektoren Δ***Ai***. Die einzelnen Flächenstücke sollen alle im gleichen Sinn wie der Rand *C* umlaufen werden. Dabei werden alle Seiten – bis auf die, die auf dem Rand *C* liegen – zweimal durchlaufen. Die Richtungen der beiden Durchläufe aber sind gegensinnig.

Für jedes einzelne Flächenstück mit seinen vier Seiten gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{4} \vec{v}_{i,k} \cdot \Delta\vec{s}_{i,k} \approx \text{rot } \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Summiert man über alle Flächenstücke Δ*Ai*, so fallen alle die Summanden heraus, deren Δ***si,k*** nicht auf dem Rand *C* liegt. Die übrig bleibenden werden nun mit dem Index *j* versehen:

$$\sum_i \sum_{k=1}^{4} \vec{v}_{i,k} \cdot \Delta\vec{s}_{i,k} = \sum_j \vec{v}_j \cdot \Delta\vec{s}_j \approx \sum_i \text{rot } \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Für alle Δ*A* gegen null (wobei natürlich auch alle Δ*s* gegen null gehen) wird daraus

$$\oint_{C} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} = \int_{A} \text{rot } \vec{v} \cdot \mathrm{d}\,\vec{A}$$

wobei die Gestalt der Fläche völlig beliebig ist. Dies ist der Integralsatz von STOKES.

8.4 Rechengesetze für Rotationen

$$\text{rot } (c\vec{v}) = c \text{ rot } \vec{v} \qquad c: \text{ reelle Zahl}$$

$$\text{rot } (\vec{v} + \vec{w}) = \text{rot } \vec{v} + \text{rot } \vec{w}$$

$$\text{rot } (U\,\vec{v}) = U \text{ rot } \vec{v} + (\text{grad } U) \times \vec{v} \qquad U = U(x, y, z)$$

8.5 Ergänzungen

1. Der Vektor rot ***v*** wird häufig als symbolische Determinante geschrieben. Diese ist als Merkhilfe sehr nützlich.

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

2. Setzt man im Integralsatz von STOKES ***v*** = grad *U*, so ergibt sich, da das Kurvenintegral über grad *U* längs einer geschlossenen Kurve stets null ist,

$$\text{rot grad } U = 0$$

Das bedeutet: Ein Gradientenfeld (Potentialfeld) ist wirbelfrei.

3. Ferner gilt:

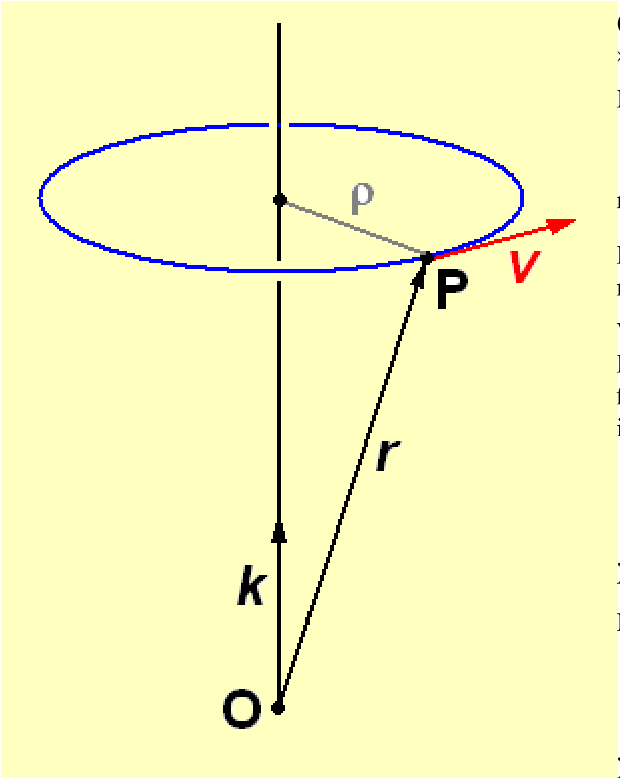
$$\text{div rot } \vec{v} = 0$$

Die Divergenz eines Feldes, dessen Feldvektor die Rotation eines anderen Feldvektors ist, ist null. Ein »Rotationsfeld« ist also quellenfrei.

Beweis am einfachsten durch Ausrechnen und Anwendung des Satzes von SCHWARZ.

8.6 Beispiele

1. Ein Vektorfeld habe konzentrische, kreisförmige Feldlinien um die Z-Achse. Der Größenwert *v* des Feldvektors sei proportional 1/*ϱ* (*ϱ* = Abstand des betrachteten Punktes von der Z-Achse). Gesucht die Gleichungen ***v*** = ***v***(***r***) und ***v*** = ***v***(*x, y, z*) sowie rot ***v***.



Der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ hat die Richtung des Vektors $\boldsymbol{k}$ x $\boldsymbol{r}$ und soll den Größenwert v = c/ϱ haben. Ferner ist

$$\vec{k} \times \vec{r} = x\,\vec{j} - y\,\vec{i} = (-y \;\; x \;\; 0) \quad \text{und} \quad \left|\vec{k} \times \vec{r}\right| = \sqrt{x^2+y^2},$$

und daher

$$\vec{v} = \frac{c}{\rho}\frac{\vec{k} \times \vec{r}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{c}{\rho^2}\left(\vec{k} \times \vec{r}\right) = \frac{c}{x^2+y^2}\,(-y \;\; x \;\; 0),$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = c\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = c\,\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ergibt sich

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 0$$

Ein Beispiel für ein solches Feld ist das magnetische Feld (Feldstärke $\boldsymbol{H}$) eines unendlich langen Leiters. (Siehe »Einleitung – Zirkulation und Wirbel eines Vektors«)

Nach den MAXWELL-Gleichungen ist

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} \qquad \vec{j}:\ \text{Vektor der Stromdichte}$$

Da die Stromdichte außerhalb des Leiters überall null ist, muss dort auch rot $\boldsymbol{H}$ = 0 sein.

Wir wenden nun zur Berechnung des Größenwerts H der Feldstärke den Integralsatz von STOKES auf eine Kreisfläche vom Radius ϱ an, die mit dem Leiter konzentrisch ist und auf ihm senkrecht steht:

$$\int_A \operatorname{rot}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Nun ist einerseits

$$\int_A \operatorname{rot}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_q \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_q j\;\mathrm{d}A = j\,q = I,$$

wobei q der Leiterquerschnitt und I die Stromstärke im Leiter ist. Andererseits ist

$$\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_C H\;\mathrm{d}s = H\oint_C \mathrm{d}s = H\,2\pi\rho.$$

Also ist

$$I = H\,2\pi\rho \quad\Rightarrow\quad H = \frac{I}{2\pi\rho}.$$

2. Gesucht sind die Eigenschaften des Feldvektors

$$\vec{v} = c\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{\left|\vec{k}\times\vec{r}\right|} = c\frac{\vec{k}\times\vec{r}}{\rho}.$$

(Siehe dazu die Abbildung bei Beispiel 1.)

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ steht auf $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{r}$ senkrecht und hat die konstante Länge c.

Ferner ist

$$\vec{k}\times\vec{r} = x\,\vec{j} - y\,\vec{i} = (-y \;\; x \;\; 0)$$

und daher

$$\vec{v} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(-y \;\; x \;\; 0)$$

Damit wird

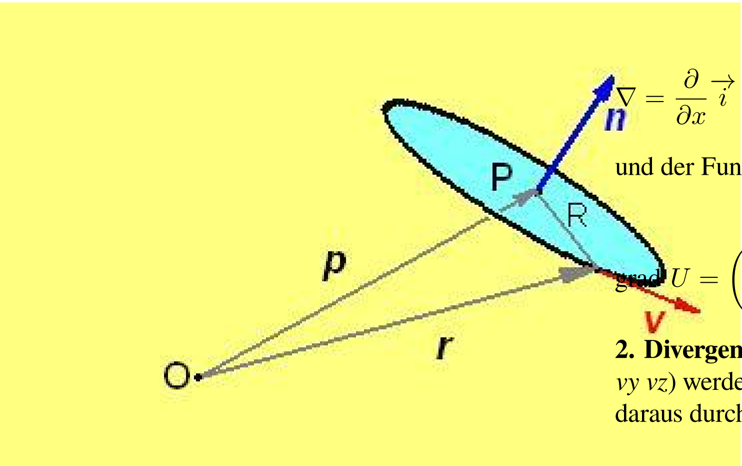
$$\text{rot } \vec{v} = c \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{v} = c\,\vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

und schließlich

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{c}{\rho} \vec{k}\,.$$

3. Eine ebene Scheibe mit der Flächennormalen ***n*** rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um einen ihrer Punkte P mit ***n*** als Drehachse. Gesucht der Geschwindigkeitsvektor ***v*** eines ihrer Punkte im Abstand R von P.



Es ist $v = \omega\, R$ und

$$\vec{v} = \omega\, \vec{n} \times \vec{R} = \omega\, \vec{n} \times (\vec{r} - \vec{p}) \quad \text{usw.}$$

Einfacher ist es jedoch, ein neues Koordinatensystem einzuführen, dessen Achsen parallel zu denen des alten sind und dessen Ursprung in P liegt. Dann ist:

$$\vec{v} = \omega \left(\vec{n} \times \vec{R} \right) \quad \text{und} \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (n_y z - n_z y)\, \vec{i} + (n_z x - n_x z)\, \vec{j} + (n_x y - n_y x)\, \vec{k}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ n_y z - n_z y & n_z x - n_x z & n_x y - n_y x \end{vmatrix} = 2\omega\, \vec{n}$$

9 Der Hamiltonsche Differential-Operator Nabla (Nabla-Operator)

Bei der Berechnung von Gradient, Divergenz und Rotation werden an einer skalaren Funktion bzw. an einer Vektorfunktion bestimmte Rechenoperationen vorgenommen. Diese weisen bei aller Verschiedenheit gewisse formale Ähnlichkeiten auf: Immer werden die partiellen Ableitungen der Funktion bzw. der Vektorkomponenten gebildet.

1. Gradient: Es werden die partiellen Ableitungen der Funktion *U(x, y, z)* berechnet und diese werden als Komponenten eines Vektors benutzt:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

Dieser Vektor kann formal aufgefasst werden als das Produkt aus und einem »symbolischen Vektor«

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \qquad \nabla : \quad \text{Nabla}$$

und der Funktion U:

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) U = \nabla U.$$

2. Divergenz: Die Komponenten eines Vektors ***v*** = (*vx vy vz*) werden partiell »nach ihrem Index« abgeleitet und daraus durch Addition eine skalare Funktion gebildet:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Diese Summe kann formal aufgefasst werden als das Skalarprodukt aus Vektor Nabla und dem Vektor

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\text{div } \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) = \nabla \cdot \vec{v}.$$

3. Rotation: Die Komponenten eines Vektors ***v*** werden partiell »nach den beiden anderen Indices« abgeleitet und daraus Differenzen nach Art eines Vektorprodukts gebildet. Diese werden schließlich als Komponenten eines neuen Vektors benutzt. In der Schreibweise als symbolische Determinante wird dies am anschaulichsten:

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Dieser Vektor wiederum kann formal aufgefasst werden als das Vektorprodukt aus dem symbolischen Vektor Nabla und dem Vektor ***v***:

rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$.

Der symbolische Vektor Nabla wird »Hamiltonscher Differentialoperator« oder Nabla-Operator genannt. (Der Name beruht auf der Ähnlichkeit des Symbols mit der antiken Harfe Nabla.) Also:

Zusammenfassung:

Mit

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ist

grad $U = \nabla U$, div $\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$, rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$.

Hier gibt es eine PDF-Version.

10 Anhang

In diesem Anhang stelle ich zunächst die Beweise der elementaren Rechengesetze für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation zusammen. Dabei gehe ich auch die Anwendung des Differentialoperators Nabla ein. Danach beweise ich die Rechengesetze für die Kombinationen der Differentialoperatoren. Dabei setze ich die Rechengesetze der Analysis (skalerer Funktionen) als bekannt (und bewiesen) voraus.

Zur deutlichen und auffälligen Unterscheidung verwende ich dabei für skalare Ortsfunktionen die Buchstaben *f = f(x, y, z), g = g(x, y, z)* usw., für vektorielle Ortsfunktionen die Buchstaben ***v*** = ***v***(*x, y, z*), ***w*** = ***w***(*x, y, z*) usw.

10.1 Elementare Rechengesetze für die Differentialoperatoren

10.1.1 Gradient

$$\mathbf{grad}(f+g) \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial(f+g)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(f+g)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(f+ \ldots}{\partial z}$$
$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z} + \boldsymbol{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \ldots$$
$$= \mathbf{grad}\, f + \mathbf{grad}\, g$$

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\mathbf{grad}(f\cdot g) \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial z}$$
$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}g + \boldsymbol{i}f\frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}g + \boldsymbol{j}f\frac{\partial g}{\partial y} + \ldots$$
$$= (\mathbf{grad}\, f)g + f\,\mathbf{grad}\, g$$

$$\nabla(f\cdot g) = (\nabla f)g + f\Delta g$$

$$\mathbf{grad}\, f^n \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial f^n}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f^n}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f^n}{\partial z}$$
$$= \boldsymbol{i}n f^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}n f^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}n f^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= n f^{n-1}\,\mathbf{grad}\, f$$

$$\nabla f^n = n f^{n-1}\nabla f$$

$$\mathbf{grad}\, f(g) \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial f(g)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f(g)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f(g)}{\partial z}$$
$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial f(g)}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f(g)}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f(g)}{\partial g} \ldots$$
$$= \frac{\partial f(g)}{\partial g}\,\mathbf{grad}\, g$$

$$\nabla f(g) = \frac{\partial f(g)}{\partial g}\nabla g$$

10.1.2 Divergenz

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \equiv \frac{\partial(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_z}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\boldsymbol{w}$$

$$\nabla(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{w}$$

$$\operatorname{div}(f\,\boldsymbol{v}) \equiv \frac{\partial(f\,\boldsymbol{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial(f\,\boldsymbol{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial(f\,\boldsymbol{v})_z}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{v}_x + f\frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{v}_y + f\frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{v}_z + f\frac{\partial \boldsymbol{v}_z}{\partial z}$$
$$= (\operatorname{grad} f)\cdot\boldsymbol{v} + f\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

$$\nabla(\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{v}) = \nabla\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + f\nabla\boldsymbol{v}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) \equiv \frac{\partial(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})_y}{\partial y} +$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(v_y w_z - v_z w_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\right.$$
$$= \frac{\partial v_y}{\partial x}w_z + v_y\frac{\partial w_z}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial x}w_y$$
$$+ \frac{\partial v_z}{\partial y}w_x + v_z\frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial y}w$$
$$+ \frac{\partial v_x}{\partial z}w_y + v_x\frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial z}w$$
$$= (\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - v\operatorname{rot}\boldsymbol{w}$$

$$\nabla(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = (\nabla\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

10.1.3 Rotation

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_x & (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_y & (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{rot}\boldsymbol{v} + \operatorname{rot}\boldsymbol{w}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \nabla\times\boldsymbol{v} + \nabla\times\boldsymbol{w}$$

$$\mathbf{rot}(f\boldsymbol{v}) \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f v_x & f v_y & f v_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} f v_z - \frac{\partial}{\partial z} f v_y\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} f v_x - \frac{\partial}{\partial x} f v_z\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} f v_y - \frac{\partial}{\partial y} f v_x\right)$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y} v_z + f\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} v_y - f \text{[illegible]}\right)$$

$$+ \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f}{\partial z} v_x + f\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} v_z - \text{[illegible]}\right)$$

$$+ \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x} v_y + f\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} v_x - \text{[illegible]}\right)$$

$$= f\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] +$$

$$+ \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y} v_z - \frac{\partial f}{\partial z} v_y\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f}{\partial z} v_x \text{[illegible]}\right)$$

$$= f\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= f\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + (\mathbf{grad}\, f) \times \boldsymbol{v} = (\mathbf{gra}\text{[illegible]}$$

$$\nabla \times (f\boldsymbol{v}) = \nabla f \times \boldsymbol{v} + f(\nabla \times \boldsymbol{v})$$

10.2 Zweifache Differentialoperationen

Durch Kombination von zwei Differentialoperatoren (Gradient, Divergenz, Rotation) werden die zweiten partiellen Ableitungen der betreffenden Funktion(en) gebildet. Wegen der Natur (Skalar oder Vektor) und wegen der Anwendbarkeit (auf skalare Funktionen oder auf Vektorfunktionen) sind nur bestimmte Kombinationen möglich. Diese sind:

$$\mathbf{grad\,div}\,\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla \boldsymbol{v}),$$
$$\mathbf{div\,grad}\, f = \nabla(\nabla f),$$
$$\mathbf{div\,rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla \times \boldsymbol{v}),$$
$$\mathbf{rot\,grad}\, f = \nabla \times (\mathbf{grad}\, f),$$
$$\mathbf{rot\,rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}).$$

Wir untersuchen nur diese Kombinationen.

$$\mathbf{grad\,div}\,\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \text{[illegible]}\right)$$

$$+ \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Weitere Vereinfachungen oder symbolische Abkürzungen sind nicht möglich.

$$\mathbf{div\,grad}\, f = \nabla(\nabla f) = \mathrm{div}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \text{[illegible]}$$

$(\Delta = \text{LA}$[illegible]

Für die Anwendung auf eine skalare Ortsfunktion gilt [illegible]

$$\mathbf{div\,rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla \times \boldsymbol{v}) = \mathrm{div}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\text{[illegible]}\right.$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\text{[illegible]}\right)$$

Beweis durch Ausrechnen und Beachtung des Satzes von SCHWARZ, der besagt, dass bei Stetigkeit der zweiten Ableitungen die Reihenfolge der Differentiationen beliebig ist. Man sieht, dass in diesem Fall der symbolische Vektor Nabla der Regel folgt, dass das Skalarprodukt zweier aufeinander senkrechter Vektoren null ist.

$$\mathbf{rot\,grad}\, f = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{rot}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\right.$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\right.$$

Die Begründung ist dieselbe wie oben (Satz von SCHWARZ). Auch hier folgt der Nabla-Operator einem Rechengesetz der Vektoralgebra: Das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ist null.

$$\mathbf{rot\,rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \mathbf{rot}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{rot}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \right.\right.$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ \boldsymbol{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] +$$

$$+ \boldsymbol{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right]$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) +$$

$$+ \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} \right) +$$

$$+ \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} \right)$$

Dieser Vektor kann so umgeformt werden, dass daraus ein Ausdruck wird, der sich später in der Elektrodynamik als sehr nützlich erweist: Zu seinen Komponenten werden jeweils drei Terme addiert, die am Ende wieder subtrahiert werden, sodass daraus die Differenz zweier Vektoren wird. Der erste davon ist der Vektor grad div $\boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}&\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}_{A}\right) + \\
+\boldsymbol{j}&\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}_{B}\right) + \\
+\boldsymbol{k}&\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{C}\right) \\
= \boldsymbol{i}&\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z}\right) + \\
+\boldsymbol{k}&\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \\
-\boldsymbol{i}&\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}_{A}\right) - \boldsymbol{j}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}_{B}\right) + \\
-\boldsymbol{k}&\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{C}\right) \\
= \mathbf{grad}\,&\mathbf{div}\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{i}\Delta v_x + \boldsymbol{j}\Delta v_y + \boldsymbol{k}\Delta v_z).
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist der Vektor, der durch Anwendung des LAPLACE-Operators auf den Vektor $\boldsymbol{v}$ entsteht. Also ist

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{v} - \Delta\boldsymbol{v}$$

oder

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$$

11 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

11.1 Text

- **Vektoranalysis: Druckversion** *Quelle:* https://de.wikibooks.org/wiki/Vektoranalysis%3A_Druckversion?oldid=313662 *Autoren:* Heuler06

11.2 Bilder

- **Datei:AnhV-1.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/9/90/AnhV-1.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-10.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a3/AnhV-10.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-11.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/ab/AnhV-11.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-12.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/7/70/AnhV-12.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-13.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/2/23/AnhV-13.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-14.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/1/17/AnhV-14.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-15.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/5/53/AnhV-15.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-16.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/4/45/AnhV-16.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-17.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/5/5a/AnhV-17.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-2.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/6/6d/AnhV-2.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-3.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/7/7e/AnhV-3.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-4.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/5/5d/AnhV-4.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-5.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/8/85/AnhV-5.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-6.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a9/AnhV-6.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-7.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/b/b1/AnhV-7.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-8.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/0/07/AnhV-8.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:AnhV-9.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/b/b5/AnhV-9.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:Rotation_001.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/2/2a/Rotation_001.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:SiPe_Vektoranalysis_1.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/2/22/SiPe_Vektoranalysis_1.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:SiPe_Vektoranalysis_2.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/9/90/SiPe_Vektoranalysis_2.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-05.4.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a2/VA-05.4.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-05.5.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/3/30/VA-05.5.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-05.8.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/1/18/VA-05.8.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-10.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/0/0c/VA-10.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-11.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/9/99/VA-11.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-47.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/1/1c/VA-47.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-56.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/6/69/VA-56.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-60.13.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/f/f1/VA-60.13.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?

- **Datei:VA-60.14.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/6/60/VA-60.14.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-60.6.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/5/5e/VA-60.6.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-60.8.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a4/VA-60.8.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-75.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/d/da/VA-75.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-81.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/b/b8/VA-81.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:VA-AB.PNG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/d/d7/VA-AB.PNG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei:_VA-05.1.JPG** *Quelle:* https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a6/VA-05.1.JPG *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?

11.3 Inhaltslizenz