Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase
2013
Mathematik

Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - x^2 + 4$$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion *f*.

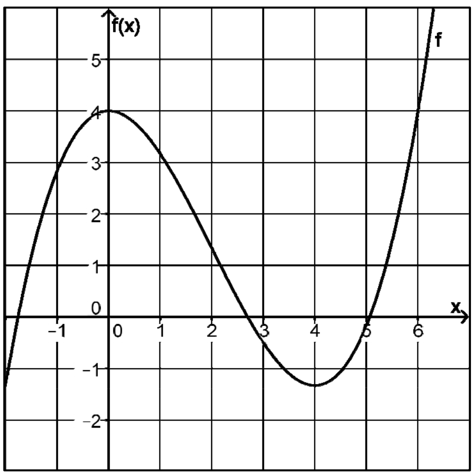

Abbildung 1

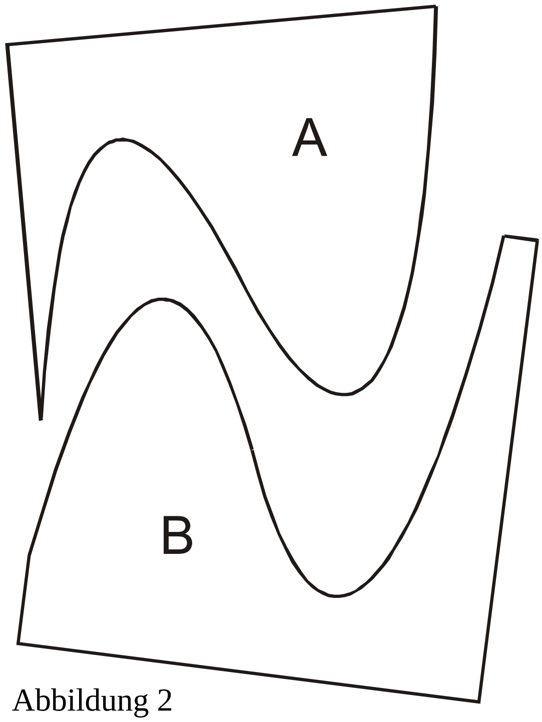

Abbildung 2

a) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und die Koordinaten des lokalen Tiefpunktes des Graphen der Funktion f.*

(2) *Berechnen Sie die Steigung der Geraden durch die beiden in a) (1) ermittelten lokalen Extrempunkte.*

(10 Punkte)

b) Die Abbildung 2 zeigt, wie durch den Graphen der Funktion *f* der in Abbildung 1 dargestellte Bereich des Koordinatensystems in zwei Teile A und B geteilt wird.

Entscheiden Sie begründet, ob der Punkt $P(2 \mid 1{,}3)$ zu A oder zu B gehört.

(3 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $Q\left(1 \,\middle|\, \frac{19}{6}\right)$.

(2) *Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle* $x = 3$ *parallel zur Tangente t aus c) (1) verläuft.*

(6 Punkte)

d) Die Abbildung 3 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'. Dieser Graph weist eine Achsensymmetrie auf.

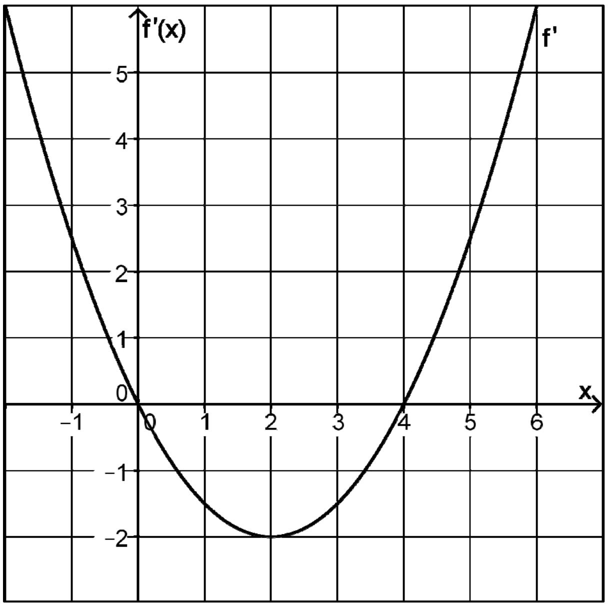

Abbildung 3

(1) *Zeichnen Sie die Symmetrieachse des Graphen von* f' *in die Abbildung 3 ein.*

(2) Die Achsensymmetrie des Graphen von f' kann durch die Gleichung

$$f'(2-a) = f'(2+a),\ a \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

Zeigen Sie anhand des Graphen, dass für $a = 3$ *die Gleichung erfüllt ist, indem Sie geeignete Hilfslinien in die Abbildung 3 einzeichnen.*

(3) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gleichung* $f'(2-a) = f'(2+a)$ *für jeden Wert von a gültig ist.*

(9 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

Jede Schülerin und jeder Schüler besitzt eine persönliche Leistungskurve, welche die Höhen und Tiefen der jeweiligen Konzentrationsfähigkeit im Tagesverlauf darstellt. Kennt man seine persönliche Leistungskurve, kann man diese z. B. für die sinnvolle Verteilung von Lernzeiten im Laufe eines Tages nutzen. Um seine eigene Leistungskurve zu erstellen, geht man folgendermaßen vor: An mehreren Tagen schätzt man etwa stündlich seine Leistungsfähigkeit auf einer Skala von 1 bis 10 ein (1: energielos, Sekundenschlaf; 10: topfit). Aus den zur jeweils gleichen Uhrzeit geschätzten Werten errechnet man die Durchschnittswerte. Mit diesen Durchschnittswerten lässt sich dann näherungsweise die persönliche Leistungskurve erstellen.

[Quelle: http://www.learning-in-activity.com/index.php?title=Auspr%C3%A4gungen_und_Optimierungsm%C3%B6glichkeiten_der_individuellen_Leistungskurve (letzter Zugriff am 22.10.2012)]

Der Graph aus Abbildung 1 stellt das Ergebnis des Selbstversuchs der Schülerin Frauke zur Ermittlung ihrer persönlichen Leistungskurve näherungsweise für den Zeitraum von 8:00 Uhr ($t = 0$) bis 15:00 Uhr ($t = 7$) dar.

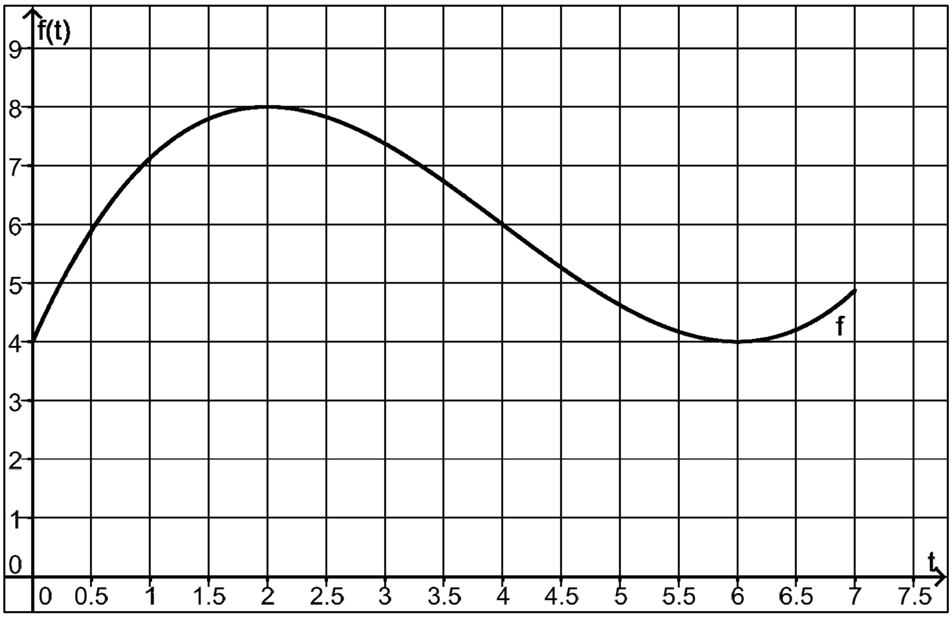

Abbildung 1

Dieser Graph lässt sich beschreiben durch die Funktion *f* mit

$$f(t) = 0{,}125 \cdot t^3 - 1{,}5 \cdot t^2 + 4{,}5 \cdot t + 4 .$$

Dabei wird der Zeit *t* in Stunden der Wert $f(t)$ für die subjektive Leistungsfähigkeit auf der Energieskala von 1 bis 10 zugeordnet. Mit dieser Funktion *f* ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

Name: ____________________

a) *Berechnen Sie nach diesem Modell Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit um 9:00 Uhr und um 15:00 Uhr.*

(4 Punkte)

b) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass Frauke um 10:00 Uhr mit dem Skalenwert 8 ihr persönliches Leistungshoch im untersuchten Zeitraum erreicht.*

(8 Punkte)

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke am stärksten abnimmt.*

Bestimmen Sie auch den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem ihre subjektive Leistungsfähigkeit am stärksten zunimmt.

(7 Punkte)

In der Abbildung 2 ist neben dem Graphen der Funktion f , der Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit beschreibt, der Graph einer weiteren Funktion g abgebildet, der die subjektive Leistungsfähigkeit von Fraukes Mitschülerin Gaby beschreibt. Gaby hat ihr persönliches Leistungshoch um 10:30 Uhr mit einem Skalenwert von 9. Der Graph von g ergibt sich durch zwei Verschiebungen parallel zu den Koordinatenachsen aus dem Graphen von f.

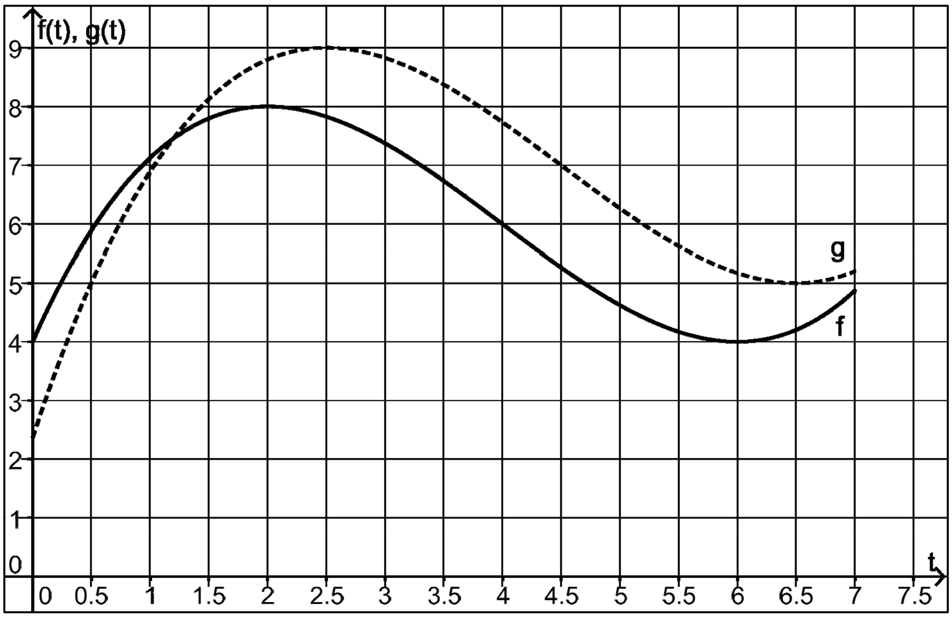

Abbildung 2

d) (1) *Beschreiben Sie, in welcher Weise sich der Graph von g durch zwei Verschiebungen des Graphen von f parallel zu den Koordinatenachsen ergibt.*

(2) *Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.*

[Hinweis: Hier sind keine Rechnungen erforderlich.]

(4 Punkte)

Name: ____________________

e) Die Leistungskurve eines dritten Schülers Hans verläuft in den ersten beiden Stunden ähnlich wie die Kurve von Frauke. Hans hat sein persönliches Leistungshoch ebenfalls um 10:00 Uhr, wobei sein maximaler Skalenwert allerdings 10 % über dem Wert von Frauke liegt. Um 12:00 Uhr befindet sich Hans in einem Leistungstief mit einem Skalenwert von 4. Dann steigt seine Leistungskurve zwei Stunden an und fällt schließlich bis 15:00 Uhr wieder ab.

(1) *Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Verlauf der Leistungskurve von Hans.*

(2) *Entscheiden Sie begründet, ob es sich bei der Leistungskurve von Hans um den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades handeln kann.*

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung