Nullstellenbestimmung von ganzrationalen Funktionen:

Sind alle Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion ganzzahlig, dann lassen sich ihre ganzzahligen Nullstellen (aber nicht die nicht-ganzzahligen N.) stets unter den ganzzahligen Teilern des absoluten Glieds der Funktion finden.

Anmerkung: Man kann mit dieser Methode Nullstellen finden, aber es kann noch weitere (nichtganzzahlige) Nullstellen geben.
Ergibt das Einsetzen des Teilers in die Funktion keine Nullstelle, dann kann die Funktion nur noch eine nichtganzzahlige Nullstelle haben.
Der Grad der Funktion bestimmt die maximale (!) Anzahl der Nullstellen.

Anweisung:

1. Teiler suchen: Bsp: 12 => Teiler sind (positiv und negativ) 1, 2, 3, 4, 12

2. alle Teiler einsetzen und überprüfen: gilt $f(x) = 0$?

3. alle Teiler für die gilt $f(x) = 0$ sind Nullstellen

4. Suche nach weiteren Teilern über andere Verfahren z.B. Polynomdivision

Bestimme zunächst die ganzzahligen Nullstellen der Funktionen. Suche ggf. mit geeigneten Verfahren nach weiteren Nullstellen:

a) $f(x) = 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 -75$

c) $f(x) = x^3 - 1$

d) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

e) $f(x) = 3x^3 - 81$

f) $f(x) = x^4 – 13x^2 + 36$

g) $f(x) = x^6 – 9x^3 + 8$

Lösungen:

a) **$f(x) = 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$**

1.) Teiler der 1 = -1 und 1
2.) Suche, mit welchem Teiler f(x) Null ergibt:

$f(-1) = = 8\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) + 1 = 0$

$f(1) = = 8\cdot(1)^3 + 2\cdot(1)^2 + 5\cdot(1) + 1 = 16$

3.) => Diese Funktion hat nur eine ganzzahlige Nullstelle und ggf. weitere nicht-ganzzahlige Nullstellen
4.) Suche nach weiteren Nullstellen: über Polynomdivision

b) **$f(x) = 2x^3 - 7x^2 -75$**

1.) Teiler der 75 = ±(1, 3, 5, 15, 25,75)
2.) Suche, mit welchem Teiler f(x) Null ergibt:

$f(5) = 2\cdot5^3 - 7\cdot5^2 - 75 = 250 -175-75 =0$

3.) => Diese Funktion hat nur eine ganzzahlige Nullstelle (die 5) aber ggf. weitere nicht-ganzzahlige Nullstellen
4.) Suche nach weiteren Nullstellen: über Polynomdivision

c) **$f(x) = x^3 - 1$**

1) Teiler der 1 = ±1
2) Suche, mit welchem Teiler f(x) Null ergibt:

$f(1) = 1^3 - 1 = 0$

3) => Diese Funktion hat nur eine ganzzahlige Nullstelle

d) **$f(x) = x^3 + x^2 - 4x – 4$**

1) Teiler der 4 = ±(1, 2, 4)
2) Suche, mit welchem Teiler f(x) Null ergibt:

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4\cdot(-1) - 4 = 0$

$f(-2) = (-2)^3 +(-)2^2 - 4\cdot(-2) - 4 = 0$

$f(2) = 2^3 + 2^2 - 4\cdot2 - 4 = 0$

3) => Diese Funktion hat drei ganzzahlige Nullstellen: -2, -1, 1; weitere Nullstellen kann es nicht geben, da es sich um eine Funktion 3. Grades handelt, die max. 3 Nullstellen haben kann.

e) **$f(x) = 3x^3 - 81$**, eine ganzzahlige Nullstellen: 3

f) **$f(x) = x^4 – 13x^2 + 36$**, vier ganzzahlige Nullstellen: -3, -2, 2, 3

g) **$f(x) = x^6 – 9x^3 + 8$,** zwei ganzzahlige Nullstellen: 1, 2