



$$4x + 20 - 2x = 40$$

Inhaltsverzeichnis

Für wen ist das Skript gedacht?.....	2
Was ist das Ziel?.....	2
Was wird nicht behandelt?.....	2
Wie ist das Skript aufgebaut?.....	2
Copyright.....	3
Was heißt "lösen"?.....	4
Probieren als Methode.....	4
Probieren mit (sehr) einfachen Gleichungen.....	5
Probieren mit Potenzen.....	5
Probieren mit einfachen Brüchen.....	6
Probieren mit Rechenregeln und Klammern.....	6
Probieren: 0 in Malketten.....	7
Probieren mit negativen Zahlen.....	7
Probieren mit mehreren Variablen.....	8
Probieren mit plus, minus, mal, geteilt und Potenzen.....	8
Probieren und unlösbare Gleichungen.....	8
Probieren wird schwerer.....	9
Einfache Zahlenrätsel.....	10
Lösen mit Umformen.....	11
Kommutativ- und Assoziativgesetz.....	11
x erst nach links bringen.....	12
x im Nenner - Kehrwert bilden.....	12
Ein Faktor am x.....	13
Mehrere Faktoren am x.....	13
x unten - Kehrwert bilden.....	14
Das Minus am Schluss.....	15
Mal und geteilt am x.....	16
Gleichungen mit langem Bruchstrich.....	17
x hoch irgendwas und wurzeln.....	18
2x ist x + x.....	19
Plus, minus, mal, geteilt gemischt.....	20
Formeln umstellen nach x.....	21

Für wen ist das Skript gedacht?

Das Skript ist für ein Selbststudium ab etwa der Klasse 10 gedacht. Du hast alle grundlegenden Rechenarten aus den Klasse 5 bis 8 schon kennen gelernt. Auch das Umformen einfacher Gleichungen ist dir nicht neu.

Was ist das Ziel?

- Sicherheit und Geschwindigkeit:
- Am Ende kannst du 90 % von Alltags-Gleichungen im Kopf lösen.

Was wird nicht behandelt?

- Sonderfälle aus der höheren Mathematik (auch Oberstufe).
- Hier geht es um einfache Gleichungen: $2x - 80 = 45$ oder $3^x = 27$

Wie ist das Skript aufgebaut?

- Es gibt insgesamt etwa 200 Aufgaben (mit Lösungen am Ende).
- Blöcke von 10 Aufgaben sind zu einem Thema zusammengefasst.
- Vor jedem Thema steht eine kurze Erklärung mit Wiederholungen.
- Danach folgen immer genau 10 Aufgaben zu diesem Thema.

Copyright

Erlaubt ist

- Das Skript im Internet nutzen
- Das Skript auf den eigenen Rechner herunterladen
- Das Skript weitergeben oder auf eigenen Seiten einzubinden

Muss der Urheber genannt werden?

- Nein

Nicht erlaubt ist

- Das Skript verändern und dann weitergeben
- Das Skript in veränderter Form veröffentlichen

Kontakt?

Sabine & Gunter Heim
Mathe-AC Lernwerkstatt Aachen GbR
Wilhelmstraße 54
52070 Aachen

Was heißt "lösen"?

Gleichungen kennst man schon von der Grundschule her. Damals hießen sie noch Platzhalteraufgaben. Hier ist eine typische Platzhalteraufgabe:

$$\text{ } + 9 = 13$$

Das war vielleicht in der zweiten Klasse noch schwierig. Jetzt aber siehst man die Lösung sofort: Die Vier muss in den Platzhalter. **Eine Gleichung zu lösen** heißt, eine Zahl zu finden, dass sie aufgeht. Diese Zahl wird an die Stelle des Platzhalters geschrieben.

Ab etwa der Klasse werden Platzhalter oft ersetzt durch den Buchstaben x:

$$x + 9 = 13$$

Das ist die selbe Aufgabe wie oben. Psychologen haben festgestellt, dass vielen (auch älteren) Personen das Lösen deutlich leichter fällt, wenn sie sich statt eines x einen leeren Platzhalter vorstellen.

Probieren als Methode

Man kann immer versuchen, Gleichungen durch Probieren mit Zahlen zu lösen. **Probieren** heißt:

1. Die Aufgabe mit einem "was" als x aussprechen
2. Eventuell als Umkehraufgabe formulieren
3. Eine möglichst einfache Zahl einsetzen und sehen was rauskommt
4. Überlegen ob weniger oder mehr besser wird

Hier ist ein Beispiel:

$$60 : x = 15$$

1. x als was: "60 geteilt durch was gibt 15?"
2. Umkehraufgabe: "15 mal was gibt 60?"
3. Zwei probieren: $60:2$ gibt 30 => zu viel, also größere Zahl probieren
4. Drei probieren: $60:3$ gibt 20 => immer noch zu viel
5. Vier probieren: $60:4$ gibt 15 => passt!

Bei Gleichungen schreibt man die Lösung dann so hin:

$$x=4$$

oder so:

$$L=\{4\}$$

Das heißt: Wenn man für das x die Zahl 4 einsetzt, dann kommt links und rechts das gleiche raus. Und damit ist die Gleichung "gelöst".

Es folgen nun zehn Übungsaufgaben. Die Aufgaben sind immer in 10er-Blöcken zusammengefasst.

Probieren mit (sehr) einfachen Gleichungen

- 1) $601 - x = 598$
- 2) $601 - 2 \cdot x = 598$
- 3) $601 - 3 \cdot x = 586$
- 4) $300 \cdot x = 6600$
- 5) $300 : x = 75$
- 6) $300 + x \cdot 2 - 10 = 320$
- 7) $300 + 60 : x - 10 = 302$
- 8) $10 : x = 2,5$
- 9) $10 : x = 5$
- 10) $10 \cdot (x - 8) \cdot 2 = 0$

Probieren mit Potenzen

Eine **Potenz** ist eine **Malkette**. Statt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ sagt man kurz 2 hoch 4 und schreibt das als 2^4 .

Die Gleichung $2^x = 16$ meint also: Wie viele Zweier muss man in eine Malkette schreiben, dass 16 rauskommt? Die Antwort ist vier und man schreibt auch jetzt wieder $x=4$.

- 11) $2^x = 32$
- 12) $2^x = 64$
- 13) $3^x = 9$
- 14) $3^x = 27$
- 15) $3^x = 81$
- 16) $10^x = 1000$
- 17) $10^x = 10$
- 18) $x^3 = 64$

- 19) $x^3 = 27$
20) $x^3 = 125$

Probieren mit einfachen Brüchen

Im folgenden 10er-Paket werden **Brüche** und **Dezimalzahlen** wiederholt. Löse alle Aufgaben ohne Taschenrechner. Schreibe die Lösung als Dezimalzahl (also Kommazahl).

- 21) $4 \cdot x = 2$
22) $4 \cdot x = 1$
23) $4 \cdot x = 6$
24) $4 \cdot x = 4,4$
25) $40 \cdot x = 48$
26) $40 \cdot x = 404$
27) $\frac{3}{4} \cdot x = 3$
28) $\frac{3}{4} \cdot x = 15$
29) $1,2 \cdot x = 36$
30) $0,9 \cdot x = 27$

Probieren mit Rechenregeln und Klammern

Jetzt werden die wichtigsten **Rechengesetze** bezüglich der Reihenfolge wiederholt.

An sich rechnet man immer von links nach rechts:

$$600 - 30 - 2 + 5 = 573$$
$$600 : 2 : 10 : 2 = 15$$
$$20 \cdot 2 : 4 = 10$$
$$20 : 4 \cdot 2 = 10$$

Treten aber in einer Rechnung verschiedene Rechenzeichen auf, dann sind mal und geteilt immer stärker als plus und minus. Und hoch ist noch stärker. Am allerstärksten sind **Klammern**:

$$600 - 2 \cdot 50 + 1 = 501$$
$$1 + 40 : 10 : 2 = 2$$
$$1 + 40 : (10 : 2) = 9$$
$$2^4 \cdot 3 = 48$$

Versuche wieder, die Lösung durch Probieren zu finden. Es wird möglicherweise schwerer aber die Aufgaben sind alle kopfrechenbar. Wenn mehrere x-se in einer Gleichung vorkommen, dann steht es in

der Gleichung immer für eine Zahl. Man muss also in einer Gleichung für mehrere x-se immer die gleiche Zahl einsetzen.

31) $600 - 2 \cdot 50 + x = 1000$

32) $x - 4 \cdot 50 + 5 = 5$

33) $x + x + x + x = 40$

34) $60 : (30 : x) = 30$

35) $60 : (30 : x) = 1$

36) $60 : (x - 17) = 20$

37) $2^x \cdot 3 = 12$

38) $20 - x \cdot 1,5 = 8$

39) $20 + x \cdot 1,5 = 29$

40) $630 - 3 \cdot x = 0$

Probieren: 0 in Malketten

Irgendwas mal Null ist immer Null.

Eine **Null in Malketten** macht alles zu Null.

Null mal irgendwas ist immer Null.

Null geteilt durch irgendwas ist (fast) immer Null.

Irgendwas geteilt **durch Null** "geht nicht".

41) $10 \cdot x = 0$

42) $10 \cdot x \cdot 2 = 0$

43) $10 \cdot x \cdot 2 \cdot 5 = 0$

44) $10 \cdot (x - 27) \cdot 2 \cdot 5 = 0$

45) $10 \cdot (3 \cdot x - 27) \cdot 2 \cdot 5 = 0$

46) $(x - 2 \cdot 5) : 10 : 2 : 1 : 1 = 0$

47) $(x - 15) : 10 : 2 : 1 : 1 = 0$

48) $(x - 4 \cdot 3,5) : 2 = 0$

49) $x : 4 = 0$

50) $x - 3 = 0$

Probieren mit negativen Zahlen

Nun werden die wichtigsten **Rechenregeln zu negativen Zahlen** kurz wiederholt:

Plus mal plus gibt plus $3 \cdot 4 = 12$ ✓

Minus mal minus gibt plus $(-2) \cdot (-4) = -8$ ✓

Minus mal plus gibt minus $(-5) \cdot 14 = -70$ ✓

Plus mal minus gibt minus $120 \cdot (-2) = -240$ ✓

Hier noch einige Beispiele:

$$\begin{aligned}8 - 10 &= -2 \\10 - 8 &= 2 \\-2 - 3 &= -5 \\-2 - (-3) &= 1 \\4 + (-5) &= -1 \\4 + (-1) &= 3 \\4 - (-2) &= 6\end{aligned}$$

Probieren mit mehreren Variablen

Die Platzhalter wie das x werden auch Variablen genannt. Variabel heißt veränderlich. Das x heißt Variable, weil es seinen Wert verändern kann. Je nachdem was man einsetzt, steht es für eine andere Zahl.

Für eine Variable darf man in einer Gleichung immer nur die gleiche Zahl einsetzen.

Wenn in einer Gleichung zwei oder mehr verschiedene Variablen auftauchen, dann darf man für sie auch unterschiedliche Zahlen einsetzen.

Beispiel

$$x + y = 10$$

Man kann für x die Fünf und für y auch die Fünf einsetzen.
Man kann für x die Eins und für y die Neun einsetzen. Das ginge auch.
Oder für x nimmt man die 9,5 und für y die 0,5. Auch das ginge.

Gleichungen mit mehreren Variablen haben oft viele bis unendlich viele Lösungen. Mit ihnen beschäftigen wir uns jetzt aber nicht weiter. Daher gibt es dazu auch keine Aufgaben.

Probieren mit plus, minus, mal, geteilt und Potenzen

$$\begin{aligned}51) \quad &4 - x = 7 \\52) \quad &10 + x = 1 \\53) \quad &10 + x = -2 \\54) \quad &2 \cdot x + 10 = 0 \\55) \quad &10 - 2 \cdot x = 0 \\56) \quad &10 - 5 \cdot x = 0 \\57) \quad &3 \cdot 3 \cdot 3 - x = 28\end{aligned}$$

- 58) $x^3 = -8$ (für Experten)
 59) $x \cdot (-2) = 16$
 60) $x \cdot (-1,5) = -9$

Probieren und unlösbare Gleichungen

Im folgenden Paket sind drei Gleichungen enthalten, für die es keine passende Zahl für x gibt. Man schreibt als Antwort "nicht lösbar".

- 61) $x = x + 1$
 62) $x \cdot x = 0$
 63) $x : x = 1$
 64) $x + x = 1$
 65) $x - x = 1$
 66) $4 : x = x$
 67) $x \cdot x \cdot x = -1$
 68) $x^x = 27$
 69) $x^x = 4$
 70) $x \cdot x = -1$

Probieren wird schwerer

Die Aufgaben bis jetzt konnte man alle gut im Kopf lösen. Das Rechnen mit Zahlen alleine nennt man [Arithmetik](#). Bisher war Arithmetik ausreichend.

Bei den folgenden Aufgaben wird das Lösen mit reiner Arithmetik im Kopf zunehmend schwerer. Es wird eine Stelle kommen, ab der die Verwendung von Umformungen leichter ist. Damit beginnt das Gebiet der [Algebra](#).

- 71) $2 \cdot x + 4 = 4 \cdot x$
 72) $x + x + x + 14 = 29$
 73) $x \cdot x = 110 - x$
 74) $24 \cdot x + 72 = 22 \cdot x + 98$
 75) $4,5 \cdot (2x + 2) = 36$
 76) $(x + 1) \cdot (x - 1) = 15$
 77) $(x + 1) \cdot (x - 1) = 63$
 78) $x : 15 + 20 = x - 36$
 79) $13 \cdot x - 64 + x = 4 \cdot x + 6$
 80) $x \cdot x \cdot x \cdot x - x \cdot x \cdot x + 14 = x \cdot 101 + 9$

Du solltest weiter alle Aufgaben ohne Taschenrechner lösen können. Hier ist eine Gleichung, die man aber ohne Taschenrechner kaum lösen könnte:

$$23 \cdot x^7 - 14,3 \cdot x^{0,5} + 4 - 0,1^x = 1$$

Solche Gleichungen werden mit Hilfe von Computer gelöst. Computer nutzen Algorithmen, die schnell und effizient gute [Näherungslösungen](#) für Gleichungen finden.

Hier sind wir am Ende des Probierens. Im folgenden Kapitel geht es dann um Algebra: [Gleichungen lösen über Umformen](#)

Einfache Zahlenrätsel

Warum beschäftigt man sich eigentlich mit Gleichungen? Man kann mit Gleichungen viele Aufgaben schneller und einfacher lösen. Hat man die Gleichung einmal aufgestellt, kann man den Text sozusagen vergessen. Man muss sich dann nur noch um die Zahlen kümmern.

Hier ein Beispiel:

Das Siebzehnfache einer Zahl soll genauso viel sein wie 48 plus diese Zahl. Wie lautet die Zahl?

Frage zuerst, was gesucht ist. Hier ist es "eine Zahl".

Man könnte schreiben:

$$17 \text{ mal die Zahl} = 48 + \text{Zahl}$$

Noch kürzer geht es, wenn "Zahl" mit x abkürzt:

$$17 \cdot x = 48 + x$$

Probiere für x die Zahlen 1, 2, 3 oder vier einzusetzen. Dann hast du schon die Lösung.

Tipps:

- Eine Zahl vermehrt um 4 ist $x+4$
- Eine Zahl vermindert um 17 ist $x-17$
- Das Dreifache einer Zahl ist $3 \cdot x$ oder kurz $3x$
- Ein Drittel einer Zahl ist $x:3$
- Zwei Drittel einer Zahl ist $x:3 \cdot 2$
- Die dritte Potenz einer Zahl ist x^3 , also $x \cdot x \cdot x$.

- 81) Wie viel Geld kriegt jedes von 4 Kindern, wenn ein Betrag von 524 Euro gleichmäßig auf die Kinder verteilt werden soll?
- 82) Das Quadrat einer gesuchten Zahl soll das Doppelte von 200 ergeben.
- 83) Das Dreifache einer Zahl vermehrt um eins soll so viel sein wie das Vierfache der Zahl vermindert um neun.
- 84) Zwei Drittel einer Zahl sollen genauso viel sein wie zwanzig weniger als diese Zahl.
- 85) Die dritte Potenz einer Zahl soll genauso viel sein wie das Vierfache dieser Zahl.
- 86) Die Summe aus einer Zahl und ihrem Doppelten soll 51 ergeben.
- 87) Wenn ich die Differenz von einer Zahl und 10 rechne soll das gleiche herauskommen wie bei einer Verneunfachung von einem Zehntel der Zahl.
- 88) Das Produkt einer Zahl mit sich selbst vermindert um das doppelte der Zahl soll 3 ergeben.
- 89) Der Quotient aus einer Zahl und 10 erhöht um 4 soll genauso viel sein wie 86 weniger als die Zahl.
- 90) Wenn ich eine Zahl 4 mal in einer Malkette schreibe soll 0 herauskommen. Wie lautet die Zahl?

Lösen mit Umformen

Wenn eine Gleichung so kompliziert ist, dass man sie nicht mehr durch Rechnen und Probieren lösen kann, dann formt man sie um. Mit jedem Umformungsschritt wird sie dabei etwas einfacher.

Beim **Umformen** darf man mit beiden Seiten der Gleichung immer die gleiche Rechnung durchführen. Das ist die Grundidee. Dazu ein paar Beispiele:

$$4 \cdot x = 20$$

$$x = 5$$

Man sieht, dass die Lösung 5 ist.
Jetzt teile ich beide Seiten durch 4
Jetzt sieht man die Lösung sofort.

$$x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Man sieht vielleicht, dass $-\frac{1}{4}$ die Lösung ist.
Von beiden Seiten $\frac{3}{4}$ abziehen
Jetzt sieht man die Lösung sofort.

$$13,2 \cdot x + 4 = 14,2 \cdot x$$

$$4 = x$$

Hier sieht man die Lösung nicht sofort.
Auf beiden Seiten $13,2 \cdot x$ abziehen gibt...
Jetzt sieht man die Lösung sofort.

Wie man Gleichungen geschickt umformt, wird in den nächsten Kapiteln erklärt.

Kommutativ- und Assoziativgesetz

Zur Erinnerung erkläre ich noch einmal kurz das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Die beiden Gesetze kann man bei Gleichungsumformungen gut gebrauchen.

Das **Kommutativgesetz** sagt: Bei reinen Plus- und Malketten ist die Reihenfolge unwichtig. Sie hat keinen Einfluss auf das Ergebnis:

$4+3+1$ ist das gleiche wie $1+3+4$.
 $4 \cdot 10 \cdot 3$ ist das gleiche wie $3 \cdot 10 \cdot 4$

Das **Assoziativgesetz** sagt: Bei reinen Plus- und Malketten kann man Klammern setzen wie man will: Das Rechenergebnis wird sich dadurch nicht ändern:

$4+3+1$ ist das gleiche wie $4+(3+1)$ oder $(4+3)+1$.
 $4 \cdot 10 \cdot 3$ ist das gleiche wie $4 \cdot (10 \cdot 3)$ oder $(4 \cdot 10) \cdot 3$

x erst nach links bringen

Man darf links und rechts einer Gleichung immer vertauschen. Wenn das x auf der rechten Seite steht, dann vertausche die Seiten der Gleichung. Das x sollte möglichst immer links stehen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 24 \cdot 5 = x \cdot x + 4 \\ x \cdot x + 4 = 24 \cdot 5 \end{array} \quad | \text{ Vertauschen}$$

Der senkrechte Strich im Beispiel ist das Umformungszeichen. Dahinter schreibt man normalerweise, was man mit der Gleichung gemacht hat. Jetzt fangen wir an mit den Umformungen. Das Ziel ist es immer, dass am Ende auf der linken Seite das x alleine steht.

x im Nenner - Kehrwert bilden

- Wenn man bei einem Bruch Zähler und Nenner vertauscht, dann nennt man das den Kehrwert bilden. Der Kehrwert von $\frac{3}{8}$ ist acht Drittel.

- Der Kehrwert von 2 ist $\frac{1}{2}$. man kann sich dazu die 2 als 2 Eitel vorstellen.

Steht ein x in einer Gleichung unten (im Nenner), dann versucht man es immer nach oben in den Zähler zu bringen. Das geht, wenn man von beiden Seiten den Kehrwert bildet.

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{3} \quad | \text{ von beiden Seiten den Kehrwert bilden}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2} \quad | \text{ Was stört beim x? Das geteilt durch 4.}$$

| Also beide Seiten mal 4 nehmen

$$x = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad | \text{ Ausrechnen}$$

$$x = 6 \quad \text{Das ist die Lösung.}$$

Ein Faktor am x

Ein **Faktor** ist etwas, das mit einer Malrechnung an etwas anderem hängt. Bei diesem Gleichungstyp wird das x also mit irgendeiner Zahl malgenommen.

$$0,25 \cdot x = 20$$

Wenn eine Zahl mit "mal" am x hängt, dann kann man beide Seiten der Gleichung durch diese Zahl teilen. Dann verschwindet die störende Zahl auf der linken Seite. Das geht so:

$$0,25 \cdot x = 20 \quad | \text{ links und rechts : 0,25}$$

$$0,25 \cdot x : 0,25 = 20 : 0,25 \quad | \text{ links Zahlen ausrechnen}$$

$$x = 20 : 0,25 \quad | \text{ jetzt rechts Zahlen ausrechnen}$$

$$x = 80 \quad x = 80 \text{ ist die Lösung.}$$

$$91) \quad 80 \cdot x = 40$$

$$92) \quad 80 \cdot x = 16$$

$$93) \quad 35 = x \cdot 0,1$$

$$94) \quad 0,0001 \cdot x = 0,001$$

- 95) $1,2 \cdot x = 108$
 96) $0,7 \cdot x = 63$
 97) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot x$
 98) $\frac{1}{4} \cdot x = 2,5$
 99) $0,1 \cdot x = 0$
 100) $x \cdot 99 = 495$

Mehrere Faktoren am x

Oft ist das x Teil einer reinen Malkette:

$$4 \cdot x \cdot 13 \cdot 25 = 2600$$

Hier gibt es zwei gute Möglichkeiten:

1. Die Zahlen malnehmen und vor das x schreiben
 $1300 \cdot x = 2600$ | Jetzt durch 1300 teilen
 $x = 2$
2. Die Zahlen einklammern und vor das x schreiben
 $(4 \cdot 12 \cdot 25) \cdot x = 2600$ | Jetzt durch die Klamme teilen
 $x = 2600 : (4 \cdot 12 \cdot 25)$ | Rechte Seite ausrechnen
 $x = 2$

Man hat also das Kommutativgesetz (Reihenfolge bei Malketten ist egal) und das Assoziativgesetz angewendet (bei Malketten sind Klammern egal). Auf beiden Wegen kommt die Lösung $x=2$ raus. Wähle den Weg aus, der dir besser liegt.

- 101) $x \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 8 = 64$
 102) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 2 = 64$
 103) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 16$
 104) $1 : 64 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot x$
 105) $\frac{1}{8} \cdot 16 \cdot x = 64$
 106) $1 \cdot x = 32$
 107) $16 \cdot 16 \cdot x \cdot 0,5 = 0$
 108) $1024 = 16 \cdot 16 \cdot x$
 109) $0,8 \cdot x \cdot 0,8 = 1,28$
 110) $10 \cdot x \cdot 10 \cdot 10 = 50$

x unten - Kehrwert bilden

- Wenn man bei einem Bruch Zähler und Nenner vertauscht, dann nennt man das den **Kehrwert bilden**. Der Kehrwert von $\frac{3}{8}$ ist acht Drittel.

- Der Kehrwert von 2 ist $\frac{1}{2}$. Man kann sich nämlich die 2 als 2 Einteil vorstellen.

Steht ein x in einer Gleichung unten (im Nenner), dann versucht man es immer nach oben in den Zähler zu bringen. Das geht, wenn man von beiden Seiten den Kehrwert bildet.

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{3}$$

| von beiden Seiten den Kehrwert bilden

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$

| Was stört beim x? Das geteilt durch 4.

| Also beide Seiten mal 4 nehmen

$$x = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

| Ausrechnen

$$x = 6$$

Sechs ist die Lösung.

$$111) \quad \frac{1}{x} = \frac{8}{4}$$

$$112) \quad 5 = \frac{10}{x}$$

$$113) \quad \frac{10}{2 \cdot x} = 5$$

$$114) \quad \frac{1}{2 \cdot x} = 5$$

$$115) \quad \frac{10}{2 \cdot x} = \frac{1}{5}$$

$$116) \quad \frac{60}{4 \cdot 12} = \frac{1}{x}$$

$$117) \quad \frac{15}{x} = \frac{60}{1}$$

$$118) \quad \frac{0,1}{x} = 5$$

$$119) \quad \frac{1,5}{x} = \frac{3}{6}$$

$$120) \quad \frac{10 \cdot \frac{1}{3}}{2 \cdot x} = 5$$

Das Minus am Schluss

Häufig bleibt am Ende der Umformung ein Minuszeichen auf einer Seite der Gleichung stehen:

$$-3 = x \quad \text{Das heißt einfach, dass } -3 \text{ die Lösung ist.}$$

Was aber, wenn das Minus beim x steht?

$$-x = 5 \quad \text{Das meint eigentlich } -1 \cdot x, \text{ also kann man beide Seiten durch } -1 \text{ teilen und erhält ...}$$

$$x = -5 \quad \text{Das ist die Lösung.}$$

Noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned} -2 \cdot x &= -10 && \text{Beide Seiten durch } -2 \text{ teilen gibt} \\ x &= 5 && \text{Das ist die Lösung.} \end{aligned}$$

- 121) $-x = 3$
- 122) $-1 \cdot x = -1$
- 123) $\frac{1}{4} \cdot x = -12$
- 124) $-\frac{1}{4} \cdot x = -12$
- 125) $-3x = 0$
- 126) $-3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot 4 = -12$
- 127) $x : (-3) = 5$
- 128) $x : (3) = 5$
- 129) $-x : (3) = 5$
- 130) $-x : (-3) = -5$

Mal und geteilt am x

Beispiel:

$$x \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 : 20 = 60$$

Auf der Seite vom x stören die 4, die 3, die 5 und die 20.
Es gibt jetzt verschiedene Wege, sie links wegzukriegen.

1. Möglichkeit: kleinschrittig
2. Möglichkeit: in Paketen

So geht es kleinschrittig:

$$\begin{array}{l} x \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 : 20 = 60 \quad | :4 \\ x \cdot 3 \cdot 5 : 20 = 60 : 4 \quad | :3 \\ x \cdot 5 : 20 = 60 : 4 : 3 \quad | :5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x : 20 = 60 : 4 : 3 : 5 \quad | \cdot 20 \\
 x = 60 : 4 : 3 : 5 \cdot 20 \quad | \text{ rechte Seite ausrechnen} \\
 x = 20
 \end{array}$$

Und so in zwei Schritten:

$$\begin{array}{l}
 x \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 : 20 = 60 \quad | : (4 \cdot 3 \cdot 5) \\
 x : 20 = 60 : (4 \cdot 3 \cdot 5) \quad | \cdot 20 \\
 x = 60 : (4 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 20 \quad | \text{ ausrechnen} \\
 x = 20
 \end{array}$$

Und so mit einem Schritt:

$$\begin{array}{l}
 x \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 : 20 = 60 \quad | : (4 \cdot 3 \cdot 5 : 20) \\
 x = 60 : (4 \cdot 3 \cdot 5 : 20) \quad | \text{ ausrechnen} \\
 x = 20
 \end{array}$$

Noch eine Erinnerung zur Bruchrechnung:

Brüche malnehmen: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner
 Durch Bruch teilen: Kehrwert von zweitem Bruch, dann malnehmen
 Den Bruchstrich kann man sich auch als geteilt denken.

- 131) $4 \cdot x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 7$
- 132) $x : 4 : 8 : 2 = \frac{1}{2}$
- 133) $0,1 \cdot x : 1 : 14 = \frac{1}{2}$
- 134) $x : 9 \cdot 4 = 16$
- 135) $x : 15 : 15 \cdot 450 = 9$
- 136) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 14$
- 137) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 7$
- 138) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 3,5$
- 139) $1 \cdot 1 \cdot 1 : 1 : 1 : 1 \cdot x = -1$
- 140) $-8 \cdot (-5) : (-20) \cdot x : 2 = 0,5$

Gleichungen mit langem Bruchstrich

Viele Gleichungen haben einen **langen Bruchstrich**:

$$\frac{4 \cdot x \cdot 20}{2 \cdot 5} = 24$$

Es gibt drei Möglichkeiten, wie man sich lange Bruchstriche vorstellen kann beziehungsweise mit ihnen umgeht:

1. Möglichkeit: Teilen statt Bruch
2. Möglichkeit: Im Paket teilen

3. Möglichkeit: erst kürzen

Teilen statt Bruch

$$\frac{20 \cdot x}{2 \cdot 5} = 24 \quad \text{wäre das gleiche wie}$$

$$20 \cdot x : 2 : 5 = 24 \quad \text{oder}$$

$$20 \cdot x : (2 \cdot 5) = 24$$

Man kann sich den Bruchstrich so vorstellen: Teile das obere der Reihe nach durch alles in der Klammer unten steht. Das wäre hier:

Teile x erst durch zwei.

Dann teile das Ergebnis noch durch 5...

oder teile x sofort durch 10.

Um die Gleichung aufzulösen könnte man also schrittweise mal 2 und mal 5 auf beiden Seiten rechnen. Oder man rechnet sofort mal 10 auf beiden Seiten.

Die dritte Möglichkeit ist es, erst einmal zu kürzen. Kürzen heißt, bei einem Bruch oben und unten durch die gleiche Zahl zu teilen.

Erst kürzen ginge so:

$$\frac{20 \cdot x}{2 \cdot 5} = 24 \quad \text{erst mit 2 kürzen gibt}$$

$$\frac{10 \cdot x}{5} = 24 \quad \text{jetzt noch mit 5 kürzen}$$

$$2 \cdot x = 24 \quad \text{Man sieht jetzt sofort: } x = 12 \text{ ist die Lösung.}$$

Teste bei den folgenden Aufgaben alle drei Wege aus. Es hängt oft von den Zahlen ab, wie man die Gleichung am besten vereinfachen kann.

$$141) \quad \frac{20 \cdot x}{-15} = 4$$

$$142) \quad \frac{4 \cdot x \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 4$$

$$143) \quad \frac{20 \cdot x}{15} = 4$$

$$144) \frac{20 \cdot x}{15} = -4$$

$$145) \frac{\frac{-1}{4} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{-8}{1}}{15} = 4$$

$$146) \frac{-1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{54}{3} = x$$

$$147) \frac{\frac{-1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{54}{3}}{2} = x$$

$$148) \frac{16 \cdot x}{2} = 4$$

$$149) \frac{64 \cdot x}{2^4} = 36$$

$$150) \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot 64}{2} = 72$$

x hoch irgendwas und wurzeln

Die Grundidee beim Umformen ist es immer, das was auf der x-Seite noch stört "wegzukriegen". Man prüft dazu immer, mit welcher Rechenart die Sache an der x-Seite hängt. Dann rechnet man auf beiden Seiten das Gegenteil. Das geht auch mit Potenzen. Potenzen sind [Ausdrücke mit Hochzahlen](#):

$$x^3 = 8 \quad \begin{array}{l} | \text{ was stört auf der x-Seite? } \Rightarrow \text{ das hoch drei} \\ | \text{ Gegenteil von hoch drei? } \Rightarrow \text{ dritte Wurzel} \\ x = \sqrt[3]{8} \quad | \text{ Die dritte Wurzel von 8 ist 2.} \end{array}$$

Also $x=2$ ist das Ergebnis

$$151) x^3 = 27$$

$$152) x^3 = 125$$

$$153) x^3 = 1000$$

$$154) 2 \cdot x^3 = 54$$

$$155) \frac{1}{4} \cdot x^3 = 250$$

$$156) 17 \cdot x^2 \cdot 1 = 68$$

$$157) 17 \cdot x^2 \cdot 0,25 = 68$$

$$158) 17 \cdot x^2 : 4 = 68$$

$$159) x^4 = 16$$

$$160) x^4 = 1$$

2x ist x + x

Hier geht es um ein häufiges Mißverständnis. Wie viele x sieht man in der folgenden Gleichung:

$$2x + 4 = 10$$

Viele Leute sehen hier ein x. Gemeint sind aber zwei x'se. Das "2x" meint, dass man zwei x'se hat. 2x bedeutet x+x. Und 3x wäre entsprechend x+x+x.

2x meint $2 \cdot x$ oder $x+x$

3x meint $3 \cdot x$ oder $x+x+x$

$\frac{3}{4}$ meint $\frac{3}{4} \cdot x$, also mehr als ein halbes aber weniger als ein ganzes x.

Hier ein Beispiel mit Klammer:

$$2(3x+4) = 10$$

Die linke Seite meint, dass man zweimal das Klammerpäckchen hat. Also hat man auch zweimal die drei x'se in der Klammer. Tatsächlich sind also 6 x'se gemeint.

Wie viele x'se sind auf der linken Seite gemeint:

161) $4x + 5x = 17$

162) $2(8x+4) + 5x = 1$

163) $0,5(8x+4) + 5x = 1$

164) $x + x + x + x = 4$

165) $2x + 4 = x$

166) $10x - (x+2) = 4$

167) $10x + (x+2) = 4$

168) $10x - 2(x+2) = 4$

169) $10x - 0,5(x+2) = 4$

170) $10x + 0,5(4x+2) = 4$

Plus, minus, mal, geteilt gemischt

Plus und minus nennt man Strichrechnung.

Mal und geteilt nennt man Punktrechnung.

Klammern sind am stärksten.

Dann kommen Potenzen.

Dann kommt Strichrechnung.

Am Schluss kommt die Strichrechnung.

Bei Umformungen geht man vom Schwachen zum Starken.

Beispiel:

$$4x + 8 = 36$$

Was stört links? Die "mal 4" und die "plus 8".

Wer hängt schwächer an der linken Seite?

Plus ist schwächer als mal, also erst die +8 wegmachen.

Das Gegenteil von +8 ist -8 (auf beiden Seiten), also

$$4x = 28$$

Jetzt auf beiden Seiten normal durch vier teilen gibt:

$$x = 7 \text{ als Lösung.}$$

So geht man vor:

=> erst Klammern auflösen

=> x'se zusammenfassen (aus $3x+4x$ macht man $7x$)

=> Dann normal weiter auflösen

Jetzt wieder Aufgaben dazu:

$$171) x + 17 = 51$$

$$172) 2x + 17 = 51$$

$$173) 0,5x + 17 = 51$$

$$174) 0,1x + 17 = 51$$

$$175) 4x + 4x - 8 = 48$$

$$176) 4x - 8 + 4x = 48$$

$$177) 2(x+4) - 5x = 59$$

$$178) -2(x+4) - 5x = 69$$

$$179) -(x+4) - 5x = 38$$

$$180) x + x + 0,5x = 10$$

Formeln umstellen nach x

Wenn man viel mit Formeln arbeitet, dann hat man oft mehrere Variablen (Buchstaben).

$$U = 2\pi r$$

Das ist die Formel für den Kreisumfang

Auf Deutsch sagt sie:

Der Umfang ist gleich 2 mal Pi mal Radius

Wenn zwischen Buchstaben nichts steht, steht dort ein gedachtes "Mal".

Wenn es heißt, dass man die Formel nach r umstellen soll, dann macht man gedanklich so, als sei das r ein x. Man geht dann alle Schritte durch wie beim Lösen einer Gleichung und schreibt am Ende:

$$r = U:(2\pi)$$

Man sagt: die Umfangsformel ist nach r umgestellt.

Hier sind nun einige Formeln aus der Geometrie. Weiter unten kommen Aufgaben zum Umstellen dieser Formeln.

Formel für das **Quadervolumen**

$$V = abc$$

V ist das Volumen des Quaders
a ist die Länge der Bodenseite
b ist die Breite der Bodenseite
c ist die Höhe des Quaders

Formel für das **Volumen einer Pyramide**

$$V = \frac{1}{3} \cdot abc \quad (\text{Bezeichnungen wie beim Quader})$$

Formeln für das **Volumen eines Zylinders**

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

V ist das Volumen des Zylinders
Pi ist die Kreiszahl, also etwa 3,14
r ist der Radius des Zylinderbodens
h ist die Höhe des Zylinders

Formeln für das **Volumen eines Kegels**

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (\text{Bezeichnungen analog zum Zylinder})$$

Formel für das **Kugelvolumen**

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

r ist der **Radius der Kugel**.

Formel für den **Kreisumfang**

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

U ist der Kreisumfang

r ist der Kreisradius

Formel für die **Kreisfläche**

$$A = \pi \cdot r^2$$

A ist die Kreisfläche

r ist der Kreisradius

- 181) Stelle die Quaderformel um nach b
- 182) Stelle die Quaderformel um nach c
- 183) Stelle die Pyramidenformel um nach b
- 184) Stelle die Pyramidenformel um nach c
- 185) Stelle die Zylinderformel um nach h
- 186) Stelle die Zylinderformel um nach r
- 187) Stelle die Kegelformel um nach h
- 188) Stelle die Kegelformel um nach r
- 189) Stelle die Kugelformel um nach r
- 190) Stelle die Kreisflächenformel um nach r

Lösungen

1)	3	45)	9	89)	100
2)	1,5	46)	10	90)	0
3)	5	47)	15	91)	0,5
4)	22	48)	14	92)	0,2
5)	4	49)	0	93)	350
6)	15	50)	3	94)	10
7)	5	51)	-3	95)	90
8)	4	52)	-9	96)	90
9)	2	53)	-12	97)	3
10)	8	54)	-5	98)	10
11)	5	55)	5	99)	0
12)	6	56)	2	100)	5
13)	2	57)	-1	101)	8
14)	3	58)	-2	102)	2
15)	4	59)	-8	103)	256
16)	3	60)	6	104)	1
17)	1	61)	nicht lösbar	105)	32
18)	4	62)	0	106)	32
19)	3	63)	alles außer 0	107)	0
20)	5	64)	0,5	108)	4
21)	0,5	65)	nicht lösbar	109)	2
22)	0,25	66)	2	110)	0,05
23)	1,5	67)	-1	111)	0,5
24)	1,1	68)	3	112)	2
25)	1,2	69)	2	113)	1
26)	10,1	70)	nicht lösbar	114)	0,1
27)	4	71)	2	115)	25
28)	20	72)	5	116)	0,8
29)	30	73)	10	117)	0,25
30)	30	74)	13	118)	0,02
31)	500	75)	3	119)	3
32)	200	76)	4	120)	1/3
33)	10	77)	8	121)	-3
34)	15	78)	60	122)	1
35)	0,5	79)	7	123)	-48
36)	20	80)	5	124)	48
37)	2	81)	131 Euro	125)	0
38)	8	82)	20	126)	4
39)	6	83)	10	127)	-15
40)	210	84)	60	128)	15
41)	0	85)	4	129)	-15
42)	0	86)	17	130)	-15
43)	0	87)	100	131)	14
44)	27	88)	3	132)	32

133) 70	149) 9	165) 2
134) 36	150) 36	166) 9
135) 4,5	151) 3	167) 11
136) 64	152) 5	168) 8
137) 32	153) 10	169) 9,5
138) 16	154) 3	170) 12
139) -1	155) 10	171) 34
140) -0,5	156) 2	172) 17
141) -3	157) 4	173) 68
142) 4	158) 1	174) 340
143) 3	159) 2	175) 7
144) -3	160) 1	176) 7
145) 60	161) 9	177) -17
146) 4	162) 21	178) -11
147) 2	163) 9	179) -7
148) 1/16	164) 4	180) 4